

GRUNDZÜGE DER ELEKTROTECHNIK

Version V 1.6/1.7 – Oktober 2003

DIETRICH MEYER-EBRECHT
LEHRSTUHL FÜR MESSTECHNIK UND BILDVERARBEITUNG
RWTH AACHEN

Textbuch zur Vorlesung
„Grundzüge der Elektrotechnik“
für Maschinenbauer, Gewerbelehrer und Bauingenieure

Prof. Dr.-Ing. Dietrich Meyer-Ebrecht
Lehrstuhl für Messtechnik und Bildverarbeitung
RWTH Aachen
Walter-Schottky-Haus (Geb. 24, Erweiterungsgelände Melaten)

Sekretariat: 80.278.60 — Fax 80.222.00 — *lfm@rwth-aachen.de*

Internet: *www.lfm.rwth-aachen.de*
(aktuelle Informationen zu den Lehrveranstaltungen, Prüfungen etc.)

Version V 1.6 – Oktober 2001 (Textteil)
Version V 1.7 – Oktober 2003 (Übungsaufgaben)

Herausgegeben vom
Lehrstuhl für Messtechnik und Bildverarbeitung der RWTH Aachen
Alle Urheberrechte liegen beim Autor
Verwendung der Inhalte auch auszugsweise nur mit ausdrücklicher
schriftlicher Genehmigung des Autors

Inhalt

Vorwort	1
1 Elektrische Energie, Spannung, Strom	5
1.1 Elektrische Spannung	5
1.2 Elektrischer Strom	7
1.3 Energie und Leistung	9
1.4 Elektrischer Widerstand	11
1.5 Stromkreis	12
1.5.1 Stromlaufplan (13)	
2 Elektrisches Feld, Kondensator	15
2.1 Was ist ein „Feld“?	15
2.2 Das elektrostatische Feld	16
2.3 Der Kondensator	18
2.3.1 Die Kondensatorgleichungen (19)	
2.3.2 Entladevorgang (20)	
2.3.3 Ladevorgang (22)	
2.3.4 Beispiel einer Anwendung (23)	
3 Magnetisches Feld, Lorentzkraft, Induktion	25
3.1 Magnetische Feldstärke, magnetische Flußdichte	25
3.2 Der magnetische Fluß	28
3.3 Magnetische Leiter – magnetischer Widerstand	29
3.3.1 Eisenkern mit Luftspalt (30)	

3.4	Kräfte im Magnetfeld	31
3.4.1	Die Lorentzkraft (32)	
3.5	Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter	33
3.6	Induzierte Spannung	34
3.6.1	Selbstinduktion, Induktivität (35)	
3.6.2	Verkoppelte Spulen (39)	
3.7	Elektromechanische Wandler	40
3.7.1	Tauchspulsystem (42)	
3.7.2	Elektrische Maschinen (43)	
4	Netzwerke	47
4.1	Netzwerkelemente	47
4.1.1	Spannungsquelle (48)	
4.1.2	Stromquelle (48)	
4.1.3	Ohmscher Widerstand (49)	
4.1.4	Kapazität und Induktivität (49)	
4.2	Der unverzweigte Stromkreis	51
4.2.1	Spannungsquelle und Verbraucher (51)	
4.2.2	Stromquelle und Verbraucher (52)	
4.2.3	Serienschaltung von Spannungsquellen (52)	
4.2.4	Widerstände in Serienschaltung (53)	
4.2.5	Die Maschengleichung (54)	
4.3	Stromverzweigung	55
4.3.1	Parallelschaltung von Stromquellen (55)	
4.3.2	Widerstände in Parallelschaltung (55)	
4.3.3	Die Knotengleichung (56)	
4.3.4	Quellen mit Innenwiderstand (57)	
4.3.5	Modellierung einer realen Quelle mittels einer Stromquelle (58)	
4.3.6	Quellenumwandlung (59)	

4.4	Netzwerke mit Maschen und Knoten	60
4.4.1	Definitionen (60)	
4.4.2	Anwendung der Maschen- und Knotengleichungen (61)	
4.4.3	Rezepte für die Vereinfachung von Netzwerken (63)	
4.5	Alternativen für die Netzwerkberechnung	64
4.5.1	Sukzessiver Abbau von Zweigen (64)	
4.5.2	Ersatzquellen-Verfahren (65)	
4.5.3	Netzwerke mit mehreren Quellen: Superpositions-Verfahren (66)	
4.5.4	Quellenumwandlung (66)	
5	Halbleiterbauelemente	67
5.1	Halbleiterdiode	67
5.1.1	Das physikalische Prinzip der Halbleiterdiode (67)	
5.1.2	Anwendung der Diode als Gleichrichter (68)	
5.2	Gesteuerte Elemente	69
5.2.1	Der Transistor (70)	
5.2.2	Anwendung: Steuerung des Stroms eines Laststromkreises (71)	
5.2.3	Entkopplungsverstärker (71)	
6	Wechselstrom	73
6.1	Die Cosinus-Schwingung	74
6.1.1	Definitionen (74)	
6.1.2	Wechselgrößen mit Phasenverschiebung (75)	
6.1.3	Die Amplitude einer Wechselgröße (75)	
6.2	Spannung, Strom, Leistung an Zweipolen	76
6.2.1	Ohmscher Widerstand: (76)	
6.2.2	Induktivität (77)	
6.2.3	Kapazität (78)	
6.2.4	Blindwiderstände, Blindleistung (79)	
6.2.5	Zusammenschaltung von Wirk- und Blindwiderständen (80)	

6.3	Die komplexe Wechselstromrechnung	80
6.3.1	Komplexer Zahlenraum und Arithmetik der komplexen Zahlen (81)	
6.3.2	Zeigerdarstellung einer Wechselgröße (83)	
6.3.3	Zeigerdiagramm (84)	
6.3.4	Rechenregeln (85)	
6.4	Anwendung der komplexen Rechnung	87
6.4.1	Komplexe Darstellung von Spannung und Strom (87)	
6.4.2	Der komplexe Widerstand (87)	
6.5	Netzwerkberechnung in komplexer Darstellung	90
6.5.1	Serienschaltung von Wechselstromwiderständen (90)	
6.5.2	Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen (92)	
6.5.3	LC-Schaltungen (94)	
6.5.4	Komplexer Spannungsteiler (95)	
6.6	Komplexe Maschengleichung und Knotengleichung	97
6.7	Komplexe Ersatzquellen	98
6.8	Transformator	99
6.8.1	Komplexe Behandlung des Transformators (99)	
6.8.2	Transformation des Verbraucherwiderstandes (101)	
6.9	Komplexe Leistungsberechnung	102
7	Netzwerke für die Signalverarbeitung	105
7.1	Filter – wozu?	105
7.2	Frequenzspektrum	106
7.3	Übertragungsfunktion	106
7.4	Ortskurve	108
7.5	Frequenzgang	109

Inhaltsverzeichnis

7.6	Kaskadierung von Filtern	111
7.6.1	Das Bode-Diagramm (111)	
7.6.2	Beispiel: Bandpaßfilter (112)	
7.7	Wechselspannungsverstärker	114
8	Drehstrom	115
8.1	Das Dreiphasensystem	115
8.1.1	Leistung im Dreiphasensystem (116)	
8.2	Drehstrommaschinen	117
8.2.1	Drehstromgenerator (117)	
8.2.2	Drehfeld-Erzeugung (118)	
8.2.3	Der Asynchronmotor (119)	
8.3	Dreiphasen-Netzwerke	121
8.3.1	Beschreibung der Dreiphasenquelle (122)	
8.3.2	Verbraucher in Sternschaltung (123)	
8.3.3	Verbraucher in Dreieckschaltung (124)	
9	Formeln	127
10	Stichworte	133
	Übungsaufgaben	137

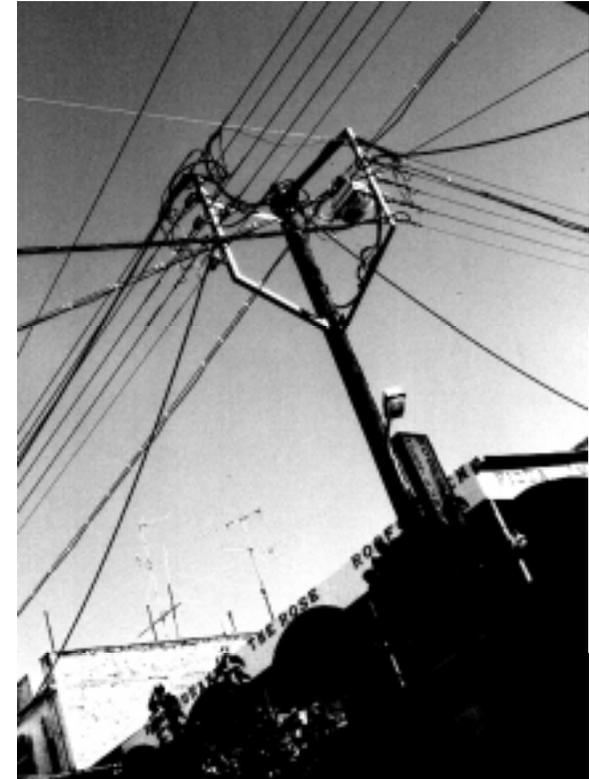
Vorwort

Elektrotechnik für den Maschinenbauer – wozu denn das?

Die Elektrizitätslehre und ihre technische Nutzung, die *Elektrotechnik*, haben für unsere Gesellschaft grundlegende Bedeutung gewonnen:

- *Energie* wird elektrisch über große Entfernungen transportiert. Elektrische Maschinen – Generatoren und Motoren – wandeln mechanische Energie in elektrische Energie bzw. elektrische in mechanische Energie. Die geographische Entkopplung zwischen Energieressourcen (z. B. Wasserkraft) und Energieverbrauchern (Industrie, Verkehr, Haushalte) hat neue Siedlungsstrukturen ermöglicht.
- *Signale* werden elektrisch – über Draht oder Funk – mit annähernd Lichtgeschwindigkeit über praktisch jede Entfernung auf der Erde (und darüber hinaus!) übermittelt. Die momentane Verfügbarkeit von Nachrichten an jedem beliebigen Ort – per Telefon, Fax, Rundfunk, Fernsehen – hat erheblichen Einfluß auf die Entwicklung gesellschaftlicher, politischer und wirtschaftlicher Strukturen genommen.
- Die *Informationsverarbeitung*, die wiederum auf elektrischen und elektronischen Schaltkreisen basiert, hat eine Vielfalt neuer Werkzeuge möglich gemacht, die zu effizienten Arbeitshilfen und wichtigen Hilfseinrichtungen für nichtelektrische Techniken geworden sind.

So hat die Elektrotechnik auch eine unverzichtbare Rolle für den Maschinenbau bekommen. Antriebe und Servoeinrichtungen verkörpern den energietechnischen Aspekt der Elektrotechnik, komplexe Steuerungen, Regelungen oder meßtechnische Überwachungen den Signalverarbeitungsaspekt.



Der Maschinenbauingenieur muß diese Einrichtungen nicht unbedingt selbst entwerfen. Er sollte sie aber in ihren grundlegenden Mechanismen und Funktionen verstehen, um sie sinnvoll nutzen zu können. Grundkenntnisse auf diesem Gebiet erleichtern auch die fachübergreifende Kommunikation und Kooperation, ohne die eine moderne Technik nicht mehr auskommt. Die Methodik der Vorgehensweise, die formalen Ansätze für die Behandlung abstrakter Vorgänge können wiederum auch außerhalb der Elektrotechnik Anregungen geben und Verständnisse schaffen.

Immer diese Formeln...

Als Ingenieure müssen wir die Mechanismen, an denen wir arbeiten, *exakt* verstehen und beschreiben können. Dazu ist eine *formale* Sprache notwendig: Wirkungsmechanismen werden in kompakter und exakter Form auf *Gleichungen* reduziert. Damit wird es möglich, Problemlösungen auf einer theoretischen Basis aufzubauen und ihre Funktion oder Wirkung bereits vor ihrer Implementierung zu *berechnen*. Formale Ansätze legen auch ein grundlegendes formales Verständnis der betrachteten Mechanismen an.

Als Ingenieur ist aber auch unsere *Intuition* gefordert. Wenn auch ein ausschließlich intuitives Verständnis eines Fachgebietes keine ausreichende Grundlage für ingenieurmäßiges Arbeiten ist, so bedarf es doch auch eines Erfassens der in den formalen Ansätzen destillierten Mechanismen aus einer ganzheitlichen Sicht, denn mit formalen Lösungsstrategien allein sind *innovative* Problemlösungen oft nicht zu erzielen.

Der Zugang zu einem Fachgebiet kann beschreibend oder formal sein, dem jeweiligen Vorwissen und den Erfahrungen z. B. im Umgang mit formalen Darstellungen entsprechend. Wir versuchen hier, beide Wege offen zu halten, indem die Gleichungen nicht mit dem Text verschachtelt sind, so daß die verbalen Beschreibungen geschlossen lesbar bleiben. Einschübe beinhalten Details, vertiefende Betrachtungen oder Bezüge zu anderen Fachgebieten,

die beim 'schnellen' Lesen übersprungen werden können. Die Beschreibungen sind am Rand auf Formeln reduziert, so daß auch ein übersichtliches Lesen der formalen Herleitungen allein gewährleistet ist, sobald der Text als redundant empfunden wird. Numeriert sind nur Gleichungen, auf die im Text speziell verwiesen wird. Grundlegende Gleichungen, die im weiteren Stoff wieder aufgenommen werden, sind umrahmt.

Am Anfang stehen grundsätzliche Erläuterungen zu den Begriffen elektrische Energie, Spannung und Strom (Abschnitt 1). Mit diesem Wissen kann bereits an die Herleitung der Regeln für verzweigte elektrische Netzwerke und die Vorgehensweise zu deren Berechnung gegangen werden (Abschnitt 4). Zuvor soll jedoch erklärt werden, woher elektrische Energie kommt und wie man sie technisch nutzbar macht. Diesem Ziel sind zwei Abschnitte gewidmet, in denen die elementaren physikalischen Zusammenhänge beschrieben werden: das elektrostatische Feld und das magnetische Feld sowie ihre Ursache und ihre Wirkung auf elektrische Ladungsträger (Abschnitt 2 und Abschnitt 3). In diesen Abschnitten werden weitere grundlegende elektrische Komponenten hergeleitet, ohne die die Netzwerkbeachtung nicht auf die technisch wichtigen Wechselstromnetzwerke erweitert werden kann (Abschnitt 6 und Abschnitt 7). Die Kenntnisse über Felder sind auch für die Beschreibung elektronischer Bauelemente (Abschnitt 5) hilfreich. Für das Verständnis der elektrischen Maschinen (Abschnitt 8) werden Kenntnisse sowohl der elektro-mechanischen Wechselwirkungen aus Abschnitt 3 als auch der Wechselstromtechnik aus Abschnitt 6 benötigt.

Ansatzweise wird versucht, den Einstieg in den Stoff – je nach Vorwissen – in einen beliebigen Abschnitt zu erlauben. Durch *Querverweise* wird der Rückgriff auf die in den jeweilig vorangehenden Abschnitten behandelten Grundbegriffe und Formeln erleichtert und andererseits auch zum Vorgriff auf folgenden Stoff angeregt. Eine gesonderte Zusammenstellung der Formeln (Abschnitt 9) sowie ein Stichwortindex (Abschnitt 10) am Ende des Textes sollen die Übersicht herstellen und durch Rückverweise das



Vorwort

Auffinden der Erläuterungen zu den Fachbegriffen und der Herleitungen der Formeln erleichtern.

Der vorliegende Umdruck enthält als weitere Ergänzung eine Sammlung von Übungsaufgaben, die in der die Vorlesung begleitenden Übung vorgerechnet werden.

Ich hoffe, daß dieser Text hilft, den Vorlesungsstoff ohne detaillierte Vorlesungsnotizen nachzuarbeiten, nicht besuchte Vorlesungen zu kompensieren und den theoretischen Unterbau für die Prüfungsvorbereitung zu repetieren. Kommentare in und nach den Vorlesungen sind immer willkommen.

Frau Edith Bücken und Frau Christiane Reinartz, sowie allen wissenschaftlichen MitarbeiterInnen des Lehrstuhls danke ich für Schreibarbeiten, Korrekturen und Ratschläge.

Zu den Formelzeichen

Formelzeichen in Gleichungen, Grafiken und Text sind durchgängig kursiv (x , x_1 , x_2) geschrieben. Vektoren werden durch Fettdruck (\mathbf{x}) gekennzeichnet (das für das Layout verwendete DTP-Programm FrameMaker® bietet leider nicht die in der Vorlesung angewendete Schreibweise Überstreichung mit Pfeil). Komplexe Größen werden durch Fettdruck und Unterstreichung ($\underline{\mathbf{x}}$) unterschieden. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden in der abgekürzten Schreibweise $\operatorname{atan}\varphi$ anstatt $\operatorname{arctan}\varphi$ geschrieben. Um die Anzahl der verwendeten Formelzeichen zu beschränken, werden die elektrischen Größen grundsätzlich mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Auf die auch übliche Verwendung von Großbuchstaben für zeitlich konstante Größen wird verzichtet; Großbuchstaben bleiben für die komplexe Darstellung reserviert.

1 Elektrische Energie, Spannung, Strom

Wenn wir Energie oder Information – die, repräsentiert durch Signale, ebenfalls eine Energie verkörpert – transportieren wollen, brauchen wir dazu ein Medium, dem wir Energie ‘aufladen’ können und das diese Energie an anderen Orten und/oder zu anderer Zeit wieder abgeben kann.

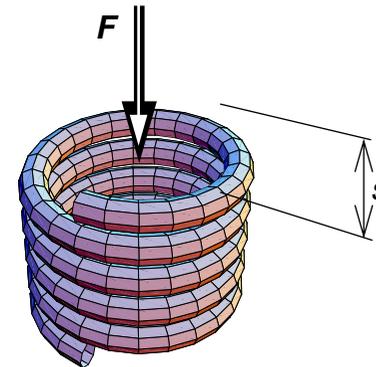
Einer mechanischen Feder kann (mechanische) Energie aufgeprägt werden, indem sie gegen ihre Federspannung zusammengedrückt oder auseinandergezogen wird: Energie = Kraft mal Weg. Die *Spannung* der Feder verkörpert die in ihr gespeicherte Energie.

Im elementaren Aufbau der Materie finden wir „Federn“ in den Wechselwirkungen der Elementarteilchen. Die Protonen des Atomkerns und die Elektronen der Atomhülle besitzen außer ihrer Masse eine *elektrische Ladung*: Protonen besitzen eine *positive* Elementarladung, Elektronen eine gleichgroße *negative* Elementarladung. *Ungleichnamige* Ladungen ziehen sich an, *gleichnamige* Ladungen stoßen sich ab.

Sollen zwei ungleichnamige Ladungsträger eines Ladungsträgerpaares von einander entfernt werden, muß eine ihrer Anziehungskraft entgegengerichtete Kraft einwirken. Die nun aufgebrauchte Energie w gibt das Ladungsträgerpaar wieder ab, wenn es infolge seiner Anziehungskraft wieder in die Ausgangslage zurückkehrt (wie die Feder!). Solange dies nicht geschieht steht das Ladungsträgerpaar „unter Spannung“.

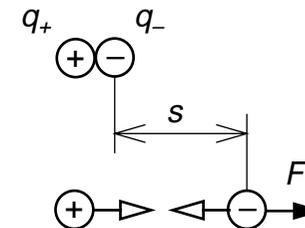
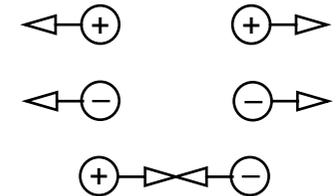
1.1 Elektrische Spannung

Damit haben wir bereits eine plausible Interpretation des Begriffs der *elektrischen Spannung* gefunden: Eine elektrische Spannung ist eine *ladungs-*



$$w = F \cdot s$$

Ladungsträger:
Kraftwechselwirkungen



$$w = F_q \cdot s$$

bezogene Energie Gl. (1-1). D.h., die Spannung u bezeichnet die Energie w , die bei einer Ladungstrennung auf ein Kollektiv von Ladungsträgern aufgebracht werden mußte, bezogen auf die Gesamtladung q dieses Kollektivs. Eine unter der Spannung u stehende Ladungs(träger)menge q gibt die Energie w_e ab, wenn alle Ladungsträger sich wieder kompensieren. Im Abschnitt 1.3 auf Seite 9 wird der Begriff Spannung noch genauer erläutert.

Die Maßeinheit für die elektrische Spannung ist das „Volt“ (V); die Maßeinheit für die Ladung ist das „Coulomb“ (C) — üblicher ist allerdings die abgeleitete Einheit „Ampère-Sekunde“ (As) entsprechend Gl. (1-2) auf Seite 8.

Einen „Behälter“ für elektrische Energie können wir uns z.B. folgendermaßen vorstellen: In ein Gefäß mit einer ionisierten flüssigen Substanz (d.h. einer Substanz die aus Paaren von Atomen oder Molekülen mit mehr Elektronen als Protonen und solchen mit gleichviel weniger Elektronen als Protonen besteht) werde eine Trennwand eingezogen. Alle positiven Ionen werden nun auf die eine Seite, alle negativen auf die andere geschafft – gegen die Anziehungskräfte zwischen den Ionenpaaren natürlich, also unter Krafteinwirkung! Würde nun eine Öffnung zwischen den beiden Teilbereichen hergestellt, würde infolge der Anziehungs- und Abstoßungskräfte ein Austauschstrom einsetzen.

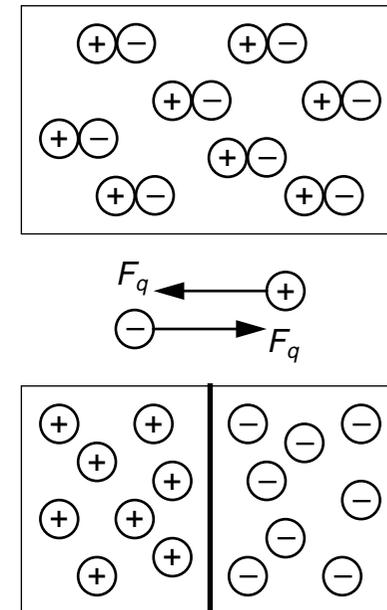
Eine solche Ladungstrennung kann *chemisch* erfolgen. Die Urform einer technischen Realisierung dieses Prozesses ist das „galvanische Element“, seine heutige Form die Trockenbatterie: Ein elektrochemischer Prozeß baut durch eine chemische Reaktion einen für die miteinander reagierenden Stoffe typischen elektrischen Spannungszustand auf (Gleichgewichtszustand). Werden Ladungsträger entnommen, sorgt eine Fortsetzung dieses Prozesses für die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustands. Der elektrochemische Prozeß in einer Trockenbatterie ist nicht reversibel, d.h. nach Verbrauch der chemischen Energiereserve des Batteriemediums ist die Batterie erschöpft („leer“). Anders im Akkumulator: Dort kann die chemische Reaktion durch einen von außen erzwungenen Rückfluß von Ladungsträgern rückgängig gemacht werden („laden“).

$$u = \frac{w}{q} \quad (1-1)$$

$$[u] = \text{V (Volt)}$$

$$w_e = u \cdot q$$

$$[q] = \text{C (Coulomb)}$$



Andere Mechanismen, mit denen Ladungsträger „unter Spannung“ gesetzt werden können und die dabei aufgebrauchte Energie wieder nutzbringend entnommen werden kann, müssen bis zur Behandlung der Abschnitte 2 "Elektrisches Feld, Kondensator" und 3 "Magnetisches Feld, Lorentzkraft, Induktion" zurückgestellt werden. Zuvor müssen wir uns mit dem „Strömen“ von Ladungsträgern befassen.

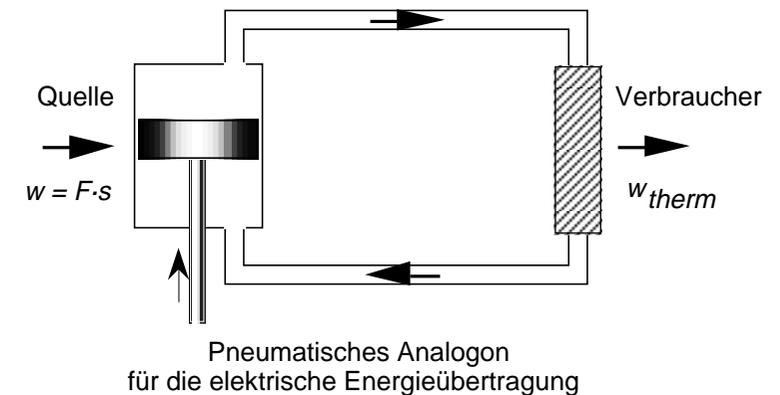
1.2 Elektrischer Strom

Betrachten wir zunächst als Analogie ein pneumatisches System zur Energieübertragung: Eine Pumpe komprimiert ein gasförmiges Medium. Schließen wir ein Rohr an, dann stellt sich auch am entfernten Ende des Rohres derselbe Gasdruck ein, denn eine einseitig höhere Konzentration von Gasmolekülen führt sofort zu einem Ausgleichsvorgang. Die durch die Pumpe aufgebrauchte Energie kann also auch am entfernten Ende der Rohrleitung entnommen werden, etwa indem das Gas dort durch eine enge Düse gepreßt wird und seine Energie als Reibungswärme abgibt. Eine Rückleitung macht aus diesem „Energieübertragungssystem“ ein geschlossenes System.

Wir stellen fest, daß bei einem pneumatischen System zum einen ein Ausgleichsvorgang im stationären Fall (d.h. keine Entnahme des Mediums) für eine Gleichverteilung des Drucks in der Rohrleitung sorgen muß und zum anderen der Transport der Energie (d.h. eine Entnahme des Mediums durch den Verbraucher) einen *Strom* des Mediums erfordert.

Einen dazu analogen Vorgang finden wir in der Elektronenleitung im metallischen Festkörper.

Während die elementaren Ladungsträger Proton und Elektron im allgemeinen innerhalb der Atome und Moleküle aneinander gebunden sind, bilden *Metalle* eine Ausnahme: Elektronen der äußeren Elektronenschale können „ihr“ Atom wechseln. Sie bilden im Kristallgefüge eines Metallkörpers eine Art „Elektronengas“. Wie die Moleküle eines Gases sind sie in regelloser



überzählige Elektronen



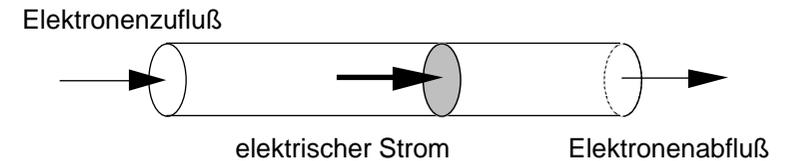
überzählige Protonen

thermischer Bewegung. Eine Ungleichverteilung ihrer Konzentration (in einem Teilbereich eines Metallkörpers sind mehr Elektronen als Protonen, in einem anderen Teilbereich weniger) führt zu einer Driftbewegung, bis eine Gleichverteilung hergestellt ist. (Die Dauer dieses Ausgleichvorgangs ist für unsere Betrachtungen vernachlässigbar.)

Damit ist das „Rohr“ für elektrische Ladungsträger gefunden: Ein metallischer Körper (*elektrischer Leiter*), umgeben von Material, das eine freie Beweglichkeit der Elektronen nicht gestattet (*Isolator*). Stoffe, die in hohem Maße isolieren, sind Glas, Keramik, Kunststoffe, Öl, Gase. Elektrische Leitungen sind deshalb im allgemeinen Metalldrähte, die mit einem Kunststoffmantel umgeben sind, in speziellen Fällen auch „nackte“ Metalldrähte, die an Keramikisolatoren hängen (Freileitungen).

Eine Nettoströmung der Elektronen, d.h. eine der thermischen, regellosen Elektronenbewegung ständig überlagerte mittlere Driftbewegung in Richtung der Mittelachse einer elektrischen Leitung, käme zustande, wenn dem einen Ende ständig Elektronen zugefügt würden und dem anderen Ende ständig gleichviele Elektronen entnommen würden. Der Durchsatz einer Ladungsmenge durch die Querschnittsfläche des Leiters entspricht damit einer gegensinnigen *Änderung* der Ladungsmenge Δq auf beiden Seiten des stromdurchflossenen Leiters. Ein elektrischer Strom ist also ein Ladungstransport, dessen Größe, die *Stromstärke* (kurz: der „Strom“) i , definiert ist durch die Ladungsmenge Δq , die in einem Zeitintervall Δt durch den gesamten Leiterquerschnitt an einer beliebigen Stelle der Leitung hindurchtritt, Gl. (1-2). Die Maßeinheit des Stroms ist das *Ampere* (A).

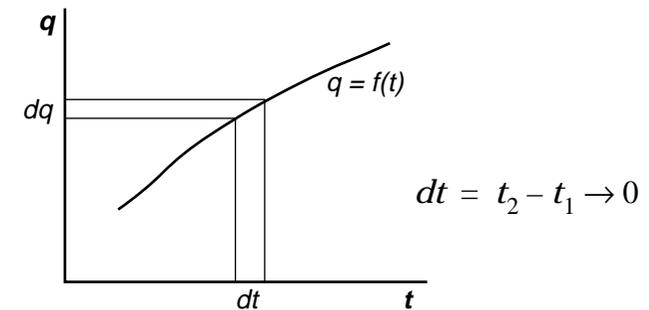
Elektrische Größen wie i , q , u , w etc. müssen keine konstanten Größen sein, sondern können Funktionen der Zeit $f(t)$ sein. Auch die zeitliche Änderung einer Größe $f(t)$ muß nicht konstant sein. Sie muß daher im Allgemeinfall in infinitesimal kleinen Zeitintervallen dt betrachtet werden. Ihre Änderung $df(t)$ wird dabei selbst infinitesimal klein. Den Quotienten df/dt nennen wir den *Differentialquotienten* „df nach dt“. Er beschreibt die Steigung der Funktion $f(t)$ zum Zeitpunkt t .



$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (1-2)$$

$$[i] = \text{A (Ampère)} = \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$



Gl. (1-3) definiert den Strom als Differentialquotient der transportierten Ladung über der Zeit. Eine konstante Stromstärke ist gegeben, wenn in jedem Zeitintervall dt eine gleichgroße Ladungsmenge dq durchgesetzt wird.

Im Vorgriff sei hier gleich die zur *Differentiation* inverse Operationen, die *Integration* genannt. Ist beispielsweise die Stromstärke i bekannt und soll die in einem bestimmten Zeitabschnitt $t_2 - t_1$ durchgesetzte Ladungsmenge bestimmt werden, dann müßte Δq über alle in diesem Zeitabschnitt liegenden Zeitintervalle Δt aufsummiert werden, Gl. (1-4). Ist aber $i(t)$ eine *nicht*konstante Funktion der Zeit, dann müssen die Zeitintervalle, über denen die Ladungszinkremente aufsummiert werden, infinitesimal klein werden und ihre Zahl damit gegen unendlich gehen. Damit werden auch die Ladungszinkremente dq infinitesimal klein, Gl. (1-5).

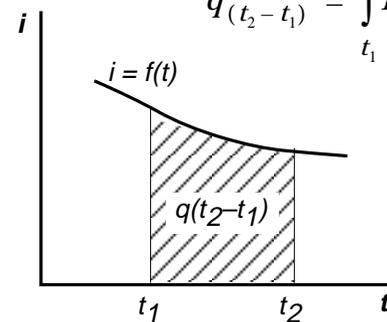
Die Summation über unendlich viele infinitesimale Zeitintervalle dt führt zum Begriff des *Integrals*, Gl. (1-6). Das Integral einer Funktion zwischen den Zeitschranken t_1 und t_2 kann als Fläche unter der Funktion im Zeitabschnitt $t_1 \leq t < t_2$ interpretiert werden.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-3)$$

$$q_{(t_2-t_1)} = \sum_{t_1}^{t_2} \Delta q = \sum_{t_1}^{t_2} i \Delta t \quad (1-4)$$

$$dq = i(t) \cdot dt \quad (1-5)$$

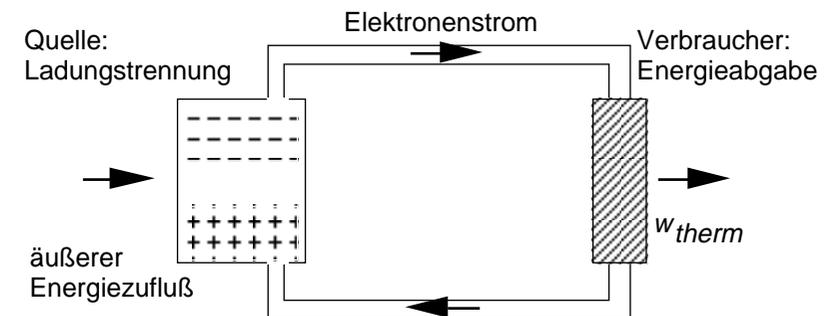
$$q_{(t_2-t_1)} = \int_{t_1}^{t_2} i(t) \cdot dt \quad (1-6)$$



1.3 Energie und Leistung

Wir fassen zusammen: Erst die Existenz von elektrischen Leitern (Metallen) und Nichtleitern (Isolierstoffen) macht einen elektrischen Energietransport und die dazu erforderlichen Energieumsetzungsprozesse möglich:

- Positive und negative Ladungsträger werden unter äußerem Energiezufluß getrennt, „unter Spannung gesetzt“: die *Quelle*.
- Negativen Ladungsträgern (Elektronen) aus dem Bereich mit Elektronenüberschuß wird erlaubt, über eine metallische Verbindung in den Bereich des Elektronenmangels zurückzukehren: die *Leitung*.
- Sie geben dabei die in der Quelle aufgenommene Energie wieder vollständig ab, „bauen ihre Spannung ab“. Die Abgabe der Energie gilt es nun zu nutzen, zu „verbrauchen“.



Energieerzeugung, Energietransport und Energieverbrauch sind die drei technisch relevanten Vorgänge in einem elektrischen Kreislauf, dem „Stromkreis“. Was ist elektrische Energie?

Im mechanischen Bereich ist Energie w das Vermögen, Arbeit zu verrichten. Arbeit – oder synonym Energie – ist das Produkt aus Kraft F und Weg s , Gl. (1-7).

In kontinuierlichen Prozessen wird zweckmäßigerweise der Energiezuwachs respektive die Energieabnahme pro Zeitintervall betrachtet, die Leistung p , Gl. (1-8). Auch hier ist aus Gründen der Allgemeingültigkeit wieder eine differentielle Betrachtung angebracht.

Eine Quelle, die eine Leistung p erbringt, gibt also im Zeitintervall $t_2 - t_1$ eine Energie w ab, Gl. (1-9).

Die voneinander getrennten Ladungsträgern innewohnende Energie wurde bereits als *Spannung* u definiert, indem sie auf die Ladungsmenge bezogen wurde. Gl. (1-10) stellt die allgemeine differentielle Formulierung von Gl. (1-1) auf Seite 6 dar.

Energiezuwachs oder Energieabnahme dw sind also als Zufluß oder Abfluß von Ladungsmengen dq , die unter dem Spannungszustand u stehen, zu deuten, Gl. (1-11). Wenn Energiezuwachs bzw. Energieabnahme auf das Zeitintervall dt bezogen werden, erhalten wir die (elektrische) Leistung, Gl. (1-12).

Als Maß für den Zu- oder Abfluß von Ladungsmengen dq in einem Zeitintervall dt wurde auf Seite 9 bereits die Stromstärke i gemäß Gl. (1-3) definiert. Diese eingesetzt folgt daraus Gl. (1-13): Die elektrische *Leistung* ist das *Produkt* aus Spannung u und Strom i ! Druck *und* Durchflußvolumen pro Zeit wären die analogen Größen in dem pneumatischen Analogon. Die Maßeinheit der Leistung ist das *Watt* (W).

Vorsicht: $[p] = W$, aber $[w] = Ws$ (*Watt-Sekunde*)!

$$w_{\text{mech}} = F \cdot s \quad (1-7)$$

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (1-8)$$

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \cdot dt \quad (1-9)$$

$$u = \frac{dw}{dq} \quad (1-10)$$

$$dw = u \cdot dq \quad (1-11)$$

$$p = \frac{dw}{dt} = u \cdot \frac{dq}{dt} \quad (1-12)$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

$$p = u \cdot i \quad (1-13)$$

$$[p] = W(\text{Watt})$$

Wo aber bleibt die Energie, die eine elektrische Energiequelle abgibt, wenn die Ladungsträger wieder zurückfließen? Sie wird (unter anderem, denn es gibt glücklicherweise noch andere Mechanismen) in thermische Energie umgesetzt. Der elektrische Leitungsmechanismus bietet dem Stromfluß nämlich einen *Widerstand*.

1.4 Elektrischer Widerstand

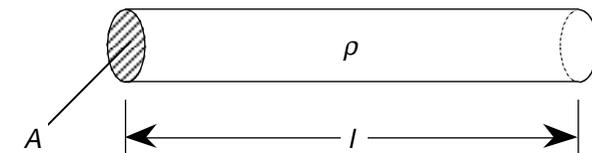
Bei der Bewegung der freien Elektronen im metallischen Kristallgitter ergeben sich Interaktionen, die um so heftiger werden, je stärker die thermischen Schwingungen der Gitteratome sind. Je größer diese „Behinderung“ wird, desto mehr Energie (also elektrische Spannung) muß aufgebracht werden, um einen bestimmten Ladungsträgerfluß zu bewirken. Andersherum muß bei gegebenem Widerstand umso mehr Spannung wirken, je stärker der Stromfluß sein soll. Diese Proportionalität wird durch das *Ohmsche Gesetz*, Gl. (1-14) beschrieben, in dem R ein Maß für den Widerstand eines elektrischen Leiters ist.

Mit unseren Herleitungen der Begriffe Spannung u (= Energie dw pro Ladungsmenge dq , Seite 6 und Seite 10) und Strom i (= transportierte Ladungsmenge dq pro Zeitintervall dt , Seite 9) wird das Ohmsche Gesetz plausibel: Setzen wir Gl. (1-10) und Gl. (1-3) in Gl. (1-14) ein, dann wird darin die Arbeit (= Energie) beschrieben, die pro Ladungsmenge dq aufzubringen ist, um diese im Zeitintervall dt gegen den Widerstand R zu transportieren, Gl. (1-15).

Der elektrische Widerstand R eines Metalldrahtes ist von seiner Länge l und seiner Querschnittsfläche A , sowie von der Materialeigenschaft, dem *spezifischen Widerstand* ρ bestimmt, Gl. (1-16). Seine Maßeinheit ist das *Ohm* (Ω).

$$u = R \cdot i \quad (1-14)$$

$$\frac{dw}{dq} = R \cdot \frac{dq}{dt} \quad (1-15)$$



$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (1-16)$$

$$[R] = \Omega (\text{Ohm}) = \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Nicht alle Metalle leiten elektrischen Strom gleich gut: Der Vergleich der spezifischen Widerstände von Kupfer und Eisen macht deutlich, warum für elektrische Leitungen vorzugsweise Kupfer als Leitermaterial gewählt wird.

Der spezifische Widerstand ist, wie seine Ursache vermuten läßt, temperaturabhängig – bei reinen Metallen in grober Näherung proportional zur absoluten Temperatur. Der Temperaturkoeffizient α beschreibt diesen Effekt in der Umgebung der Raumtemperatur $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, Gl. (1–17).

Für Anwendungen, in denen eine Temperaturabhängigkeit störend ist, sind Metall-Legierungen entwickelt worden, bei denen der Temperaturkoeffizient im technisch relevanten Temperaturbereich (z.B. $\vartheta = 0 \dots 40^\circ\text{C}$) verschwindend klein ist.

Kehren wir zum Ausgangspunkt zurück: Ladungstransport kostet Energie. Oder: Stromfluß wandelt elektrische Leistung in Wärmeleistung. Verantwortlich dafür ist der Widerstand, den der elektrische Leitungsmechanismus der Ladungsträgerbewegung entgegensetzt. Wenn nicht ausdrücklich thermische Leistung als Endprodukt gewünscht ist (Beispiele: Heizplatte, Glühfadenlampe), sprechen wir von *Verlustleistung*. Sie wächst mit dem *Quadrat* des Stroms, der durch einen Widerstand „hindurchgedrückt“ wird, Gl. (1–18).

1.5 Stromkreis

Ein einfacher Stromkreis ist nun vollständig zu beschreiben. Er besteht beispielsweise aus einer Trockenbatterie mit der Spannung u_Q als Quelle und einem Heizdraht mit dem Widerstand R als Verbraucher. Quelle und Verbraucher sind über Leitungen miteinander verbunden, symbolisch dargestellt im Stromlaufplan.

$$\rho_{\text{Cu}} \approx 0,017 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$$

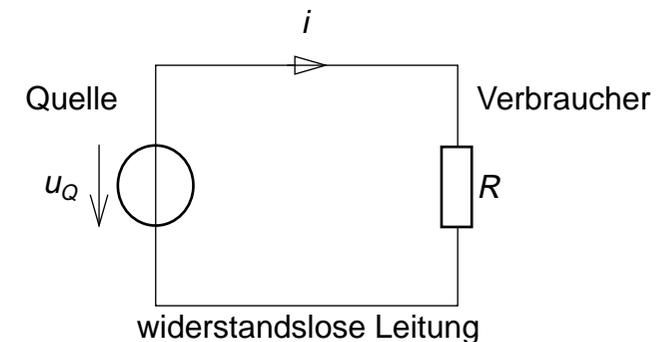
$$\rho_{\text{Fe}} \approx 0,1 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\rho \approx \rho_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20^\circ\text{C})] \quad (1-17)$$

$$\alpha \approx 4 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C} \quad \text{für reine Metalle}$$

$$p = u \cdot i \quad u = R \cdot i$$

$$p = R \cdot i^2 \quad (1-18)$$



1.5.1 Stromlaufplan

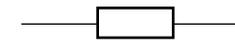
Der Stromlaufplan (oder Schaltplan) ist eine Abstraktion. Die Verbindungslinien zwischen den Komponenten sind als *widerstandslose* Leiter zu interpretieren. Sie können tatsächliche Leitungen symbolisieren, wenn deren Widerstand vernachlässigbar klein gegenüber dem Verbraucherwiderstand ist. Sie können auch eine widerstandsbehaftete Leitung (hier den Heizdraht) darstellen, deren Gesamtwiderstand auf einen kurzen Abschnitt, repräsentiert durch das Widerstandssymbol (Rechteck), konzentriert sei.

Der *Strompfeil* auf einer Leitung stellt die *technische* Stromrichtung dar, die scheinbare Strömungsrichtung *positiver* Ladungsträger. Er ist also der physikalischen Strömungsrichtung der (negativen) Elektronen entgegengesetzt! (Als die Konventionen für Polaritäts- und Richtungsbezeichnungen eingeführt wurden, war leider das Verständnis der physikalischen Vorgänge noch etwas rückständig!)

Eine Quelle, die zu jeder Zeit eine beliebig große Menge von Ladungsträgern unter immer gleicher Spannung u anbietet, wird (Gleich-) *Spannungsquelle* genannt. Ihre Polarität wird entweder durch Polaritätszeichen (+/-) oder durch einen Spannungspfeil angegeben.

Der *Spannungspfeil* an einer Quelle gibt die Richtung an, in der *positive* Ladungsträger in den spannungslosen Zustand zurückkehren wollen. Der Strom in einem Stromkreis (technische Stromrichtung) fließt also durch den Verbraucher in Spannungspfeilrichtung, durch die Quelle aber dem Spannungspfeil entgegen! (Siehe Stromkreisskizze auf Seite 12.)

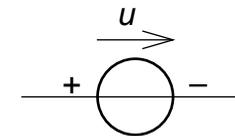
Spannungen können nur relativ, d.h. zwischen zwei Punkten entlang eines Stromkreises angegeben werden, z.B. die Spannung zwischen den Elektroden („Klemmen“) einer Batterie. Zwischen zwei beliebigen Punkten auf einem widerstandslosen Leiter ist der Spannungsunterschied („die Spannung“) Null! Die Spannung zwischen einem beliebigen Punkt auf der Hinleitung und einem beliebigen Punkt auf der Rückleitung (u_1 oder u_2) ist daher



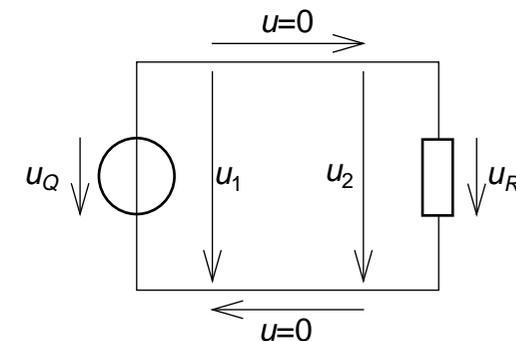
Verbraucher (ohmscher Widerstand)



Leitung mit Strompfeil



Spannungsquelle mit Spannungspfeil



immer gleich der Quellenspannung u_Q , denn auf den widerstandslosen Leitungen findet jeweils ein vollständiger „Potentialausgleich“ statt (Analogie: Druckausgleich in einem Gasrohr). Folglich ist die Spannung u_R „an“ oder „über“ dem Verbraucher (d.h. zwischen dessen Klemmen) ebenfalls gleich der Quellenspannung u_Q .

In diesem Stromkreis ist der Strom i lediglich durch die Größe des Verbraucherwiderstands R bestimmt, siehe Ohmsches Gesetz Gl. (1–14) auf Seite 11. Wir können dies auch so interpretieren: Die den Ladungsträgern von der Quelle aufgeprägte Energie bewirkt einen Strom, der gerade so groß ist, daß die aufgeprägte Energie beim Durchfluß durch den Widerstand vollständig aufgezehrt wird.

$$u_R = u_1 = u_2 = u_Q$$

$$i = \frac{1}{R} \cdot u_R = \frac{1}{R} \cdot u_Q$$

Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt ab Seite 137

2 Elektrisches Feld, Kondensator

Von den elementaren Vorgängen – Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen Teilchen, Bewegung dieser Teilchen – haben wir sehr schnell den Schritt zu makroskopischen Größen – hier elektrische Spannung und elektrischer Strom – gemacht. Dies sind die für die technische Nutzung interessanten Größen. Dennoch müssen wir uns noch etwas ausgiebiger auf die Ebene der elementaren Vorgänge begeben, um die technisch wichtigen Effekte konstruktiv beherrschen zu können.

In diesem und dem folgenden Abschnitt 3 "Magnetisches Feld, Lorentzkraft, Induktion" werden zwei grundlegend wichtige Begriffe eingeführt, das *elektrische Feld* und das *magnetische Feld*.

2.1 Was ist ein „Feld“?

Unser Ausgangspunkt sind die Kräfte auf elektrische Ladungsträger. Die Kraft ist eine *gerichtete* Größe. Um sie vollständig zu beschreiben, müssen wir sowohl ihren *Betrag* als auch ihre *Richtung* angeben. Wir erhalten einen *Vektor*.

Vektorielle Größen werden durch **Fettdruck** ihrer Formelzeichen gekennzeichnet. Für den Betrag des Vektors werden dieselben Formelzeichen im üblichen Halbfettdruck verwendet.

$\mathbf{F} \Rightarrow$ Vektor

$F = |\mathbf{F}| \Rightarrow$ Betrag

Physikalische Größen, die in Betrag und Richtung ortsabhängig sind (ortsabhängige Vektoren), werden durch *Felder* beschrieben. Ein Feld kann als Ursache für eine Kraft im Raum verstanden werden und deren Ortsabhängigkeit im Raum in Betrag und Richtung beschreiben.

Das Gravitationsfeld ist ein Beispiel für ein Feld. Im Umfeld einer (großen) Masse M erfährt eine (kleine) Masse m eine Anziehungskraft. Ihre Richtung wird durch *Feldlinien* symbolisiert. Ihr Betrag ist umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Feldlinien. Die Feldgröße – hier die Gravitation \mathbf{g} – beschreibt zunächst nur die Möglichkeit einer ortsabhängigen Kraftwirkung, ist also eine *abstrakte* Beschreibung. Erst das Vorhandensein einer Masse m im felderfüllten Raum läßt diese Kraft als Produkt von Feldgröße \mathbf{g} und Masse m zur Wirkung kommen. Die Richtung von \mathbf{F}_g ist durch die Richtung des Feldvektors \mathbf{g} gegeben, der Betrag durch das Produkt des Betrags von \mathbf{g} und der Masse m .

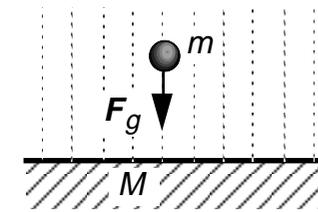
Die Kräfte zwischen (ruhenden) elektrischen Ladungen im Raum werden mit Hilfe des elektrischen (oder präziser: *elektrostatischen*) Feldes beschrieben.

2.2 Das elektrostatische Feld

Zwei parallele Metallplatten seien durch einen Isolierraum getrennt. Der ladungsmäßig neutrale Zustand (gleiche Dichte von Elektronen und Protonen in jeder der beiden leitenden Platten) sei nun aufgehoben, indem Elektronen (negative Ladungen) über den Abstand zwischen den Platten d von der oberen Platte zur unteren Platte geschafft worden seien, so daß auf der unteren Platte eine Überschuß an negativen Ladungen, auf der oberen ein gleichgroßer Mangel an negativen Ladungen (d.h. ein Überschuß nichtkompensierter positiver Ladungen) entstanden ist.

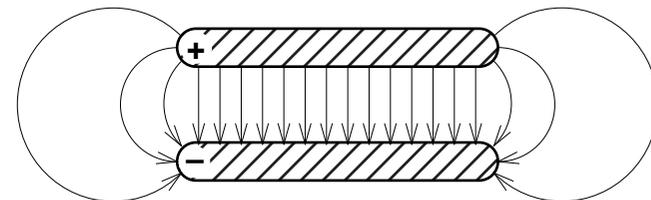
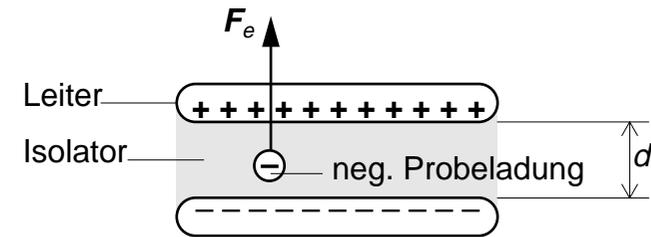
Bringen wir in den Plattenzwischenraum nun ein geladenes Teilchen, so wird dieses auf dem kürzesten Weg zur entgegengesetzt geladenen Platte gezogen.

Analog zum Gravitationsfeld existiert durch die Ladungstrennung im Plattenzwischenraum (und um die Platte herum!) ein Feld, das wirksam wird, wenn eine Ladung eingebracht wird. Die dann verursachte „elektrostatische“



$$\mathbf{F}_g = m \cdot \mathbf{g}$$

$$F_g = m \cdot g \quad \angle \mathbf{F}_g = \angle \mathbf{g}$$



Kraft \mathbf{F}_e ist proportional zur eingebrachten Ladung q und der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und richtungsgleich zu dieser, Gl. (2-1). Im Innenraum zwischen den parallelen Platten ist das elektrische Feld *homogen*, d.h. Richtung und Stärke sind *ortsunabhängig*. Im Randbereich wird das Feld *inhomogen*.

Ursache dieser Felder sind offensichtlich die getrennten Ladungen auf den Platten. Ihre Dichte D , d.h. die Ladungsmenge pro Flächeneinheit gemäß Gl. (2-2), bestimmt die Stärke des elektrischen Feldes. D wird *elektrische Flußdichte* genannt.

Unter *elektrischem Fluß* darf hier keinesfalls ein „Fließen“ von Ladungsträgern verstanden werden. Dafür wurden die Begriffe *Strom* (Seite 7) und die auf Seite 25 behandelte *Stromdichte* festgelegt. In den Begriffen *elektrischer Fluß* und *elektrische Flußdichte* spiegelt sich vielmehr die Dualität zu den Magnetfeldgrößen *magnetischer Fluß* (Seite 28) und *magnetische Flußdichte* (Seite 25) wieder.

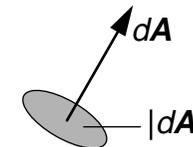
Im allgemeinen Fall nichtparalleler nichtebener Flächen kann D ortsabhängig sein. Für diesen Fall muß das (Ober-)Flächeninkrement dA als *Flächenvektor* $d\mathbf{A}$ definiert werden. Die Richtung von $d\mathbf{A}$ ist durch die Normale auf dem Flächeninkrement dA gegeben. Die ortsabhängige Flußdichte D kann nun durch eine Reduktion auf infinitesimal kleine Flächen dA bestimmt werden. Der Vektor $d\mathbf{A}$ gibt mit seiner Richtung an, wie die elektrostatische Kraft ausgerichtet ist, die aus der auf diesem Flächeninkrement aufgebauten Ladung resultiert. Die elektrische Flußdichte hat sinngemäß eine Richtung im Raum, da die Fläche, auf der sich die Ladung befindet, eine Orientierung im Raum hat. Daher muß auch die elektrische Flußdichte als Vektor \mathbf{D} gemäß Gl. (2-3) verstanden werden.

Über eine Stoffkonstante, die *Dielektrizitätskonstante* ϵ , ist die elektrische Feldstärke \mathbf{E} proportional und richtungsgleich zur elektrischen Flußdichte \mathbf{D} , Gl. (2-4).

Jetzt wird der Begriff *elektrische Spannung* plausibel: Zwischen den beiden Platten existiert eine Spannung u aufgrund des elektrischen Feldes \mathbf{E} . Wird nämlich ein Ladungselement dq gegen die Feldrichtung von einer Platte

$$\mathbf{F}_e = q \cdot \mathbf{E} \quad (2-1)$$

$$D = \frac{q}{A} \quad (2-2)$$



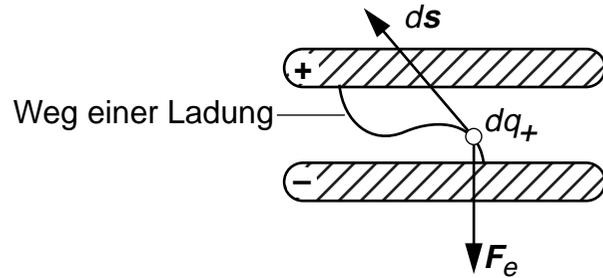
$$dq = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{D} = \frac{dq}{d\mathbf{A}} \quad (2-3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathbf{D} \quad (2-4)$$

$$\epsilon_{\text{Vakuum}} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

zur anderen geschafft (vermehrt also die vorhandene Ladung), muß dazu eine inkrementelle Arbeit (Energie) dw nach Gl. (2-5) aufgewandt werden.



Das Skalarprodukt von Kraftvektor F_e und Weginkrementvektor ds entlang des Transportwegs drückt aus, daß in dem vorliegenden homogenen Feld nur die vertikale Wegkomponente einen Beitrag zu dw leistet, d.h. dw ist immer so groß wie bei einer auf dem kürzesten Weg d transportierten Ladung q , Gl. (2-6).

Aus der Definition der Spannung nach Gl. (1-10) auf Seite 10 folgt Gl. (2-7) nach Einsetzen von Gl. (2-2) und Gl. (2-4). u ist von der insgesamt verschobenen Ladung q abhängig, die sich gleichmäßig über die Fläche A verteilt.

Die Spannung ergibt sich damit nach Gl. (2-8): Je größer die Ladung q ist, desto stärker wird das elektrische Feld und damit die Spannung. Je länger der Weg d ist, desto mehr Transportarbeit muß aufgebracht werden. Aber je größer die Fläche, über die sich die Ladung verteilt, desto geringer ist ihr lokaler Effekt für das Feld und damit ihr Einfluß auf die Spannung zwischen den Platten.

2.3 Der Kondensator

Verbinden wir nun die ungeladenen Platten mit einer Spannungsquelle (einem regenerierbaren Reservoir von Ladungsträgern der Spannung u_Q), dann stellt sich deren Spannungszustand auch zwischen den Platten ein,

$$dw = \int_0^d \mathbf{F}_e ds \quad (2-5)$$

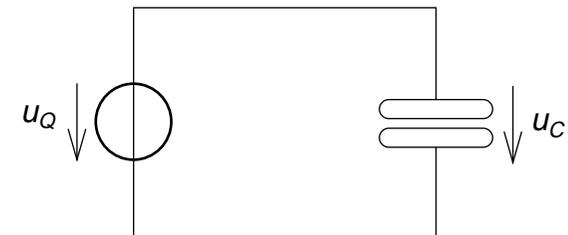
$$dw = F_e \cdot d \quad (2-6)$$

$$F_e = dq \cdot E$$

$$dw = dq \cdot E \cdot d$$

$$u = \frac{dw}{dq} = E \cdot d = \frac{1}{\epsilon} \cdot D \cdot d = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{q}{A} \cdot d \quad (2-7)$$

$$u = q \cdot \frac{d}{\epsilon \cdot A} \quad (2-8)$$



indem die dazu nötige Ladungsmenge in einem Ausgleichsvorgang von der Quelle auf die Platten fließt. Je größer die Platten und je kleiner der Abstand, desto größer ist gemäß Gl. (2-9), die wir aus Gl. (2-8) herleiten, die Ladungsmenge, die sich in dieser Anordnung nun befindet und auch erhalten („gespeichert“) bleibt, wenn wir die Leitungen zur Quelle auftrennen.

Ein solcher Ladungsspeicher wird „Kondensator“ genannt. Seine Abmessungen und die Eigenschaften des Isolators („Dielektrikum“) zwischen den „Elektroden“ – der Proportionalitätsfaktor in Gl. (2-9) – bestimmen seine (Speicher-)Kapazität C , Gl. (2-10). Ihre Maßeinheit ist das „Farad“ (F); technisch relevant sind Kapazitäten im μF -, nF - und pF -Bereich. Die Eigenschaft des Dielektrikums wird zweckmäßigerweise gemäß Gl. (2-11) als relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r , d.h. bezogen auf Vakuum ϵ_0 nach Gl. (2-4) angegeben. (ϵ_r kann bei keinem Medium kleiner als 1 sein!)

Kondensatorladung und Kondensatorspannung sind einander proportional, Gl. (2-12)!

Da eine in einem Kondensator befindliche Ladung unter Spannung steht, ist im geladenen Kondensator eine *Energie gespeichert*. Die gespeicherte Energiemenge wird wieder abgegeben, wenn wir den Elektronen ihren Rückweg über eine leitende Verbindung zwischen den Elektroden freigeben, den Kondensator also wieder entladen. Wir können diese Energie nutzen, indem wir einen Entladestromkreis realisieren, in den ein Verbraucher (Widerstand) eingeschaltet ist. Um die sich einstellenden Spannungs- und Stromverläufe berechnen zu können, muß zunächst der grundsätzliche Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator hergeleitet werden.

2.3.1 Die Kondensatorgleichungen

Die Kondensatorspannung ist nach Gl. (2-12) gegeben durch die Ladung q auf dem Kondensator. Damit sich die Ladung in einem Kondensator ändert, muß ein elektrischer Strom Ladung in den Kondensator hinein oder aus ihm

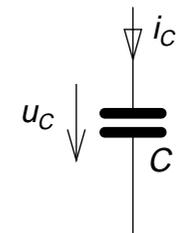
$$q = u_Q \cdot \epsilon \cdot \frac{A}{d} \quad (2-9)$$

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d} \quad (2-10)$$

$$[C] = \frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{F (Farad)}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (2-11)$$

$$q = C \cdot u_C \quad (2-12)$$



$$u_C = \frac{1}{C} \cdot q$$

heraus transportieren: Bei einem Strom i ändert sich die gespeicherte Ladung im Zeitintervall dt um das Ladungszinkrement dq , wie aus Gl. (1–9) auf Seite 10 hervorgeht. Damit ändert sich auch die Kondensatorspannung um ein Spannungszinkrement du . Folglich kann mit Gl. (2–13) aus einer Spannungsänderung du pro Zeitintervall dt auf die momentane Lade- oder Entlade-Stromstärke geschlossen werden (der Kondensator wird geladen, wenn bei gleichsinniger Strom- und Spannungspfeilrichtung $i > 0$ ist).

Gl. (2–13) stellt die Beziehung zwischen Strom und Spannung beim Kondensator her. (Im Gegensatz zum Ohmschen Gesetz, der Beziehung zwischen Strom und Spannung beim Widerstand, finden wir beim Kondensator eine *Differentialgleichung!*)

Da andererseits die auf einen Kondensator transportierte Ladung – und damit die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt t – das Ergebnis eines bis zu diesem Zeitpunkt geflossenen Stroms ist, ergibt sich als Umkehrung von Gl. (2–13) die *Integralgleichung* Gl. (2–14) als Beziehung zwischen Spannung und Strom.

2.3.2 Entladevorgang

Ein auf die Spannung u_0 aufgeladener Kondensator C soll über einen Widerstand R entladen werden. Durch einen Schalter wird der Stromkreis im Zeitpunkt $t=0$ geschlossen. Der in diesem Moment einsetzende Strom ist $i=u_C/R$, denn die Spannung am Widerstand ist vom Zeitpunkt des Schließens des Schalters an gleich der Kondensatorspannung.

Nun gilt, daß ein *abgegebener* Strom zu einer proportionalen Spannungs*min*derung $-du_C/dt$ führt (negativ, weil u_C bei positivem i in diesem Fall kleiner wird!).

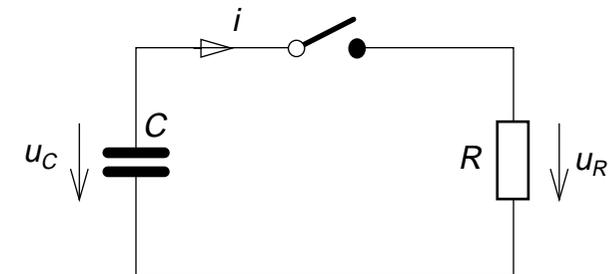
Vorsicht mit den Vorzeichen: Sie geben nur einen Sinn in Verbindung mit der Festlegung der Richtung der Spannungs- und Strompfeile!

$$dq = i \cdot dt$$

$$du_C = \frac{1}{C} \cdot dq = \frac{1}{C} \cdot i \cdot dt$$

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (2-13)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad (2-14)$$



$$i = -C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad i = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{R}$$

$$\frac{d}{dt}u_C + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_C = 0 \quad (2-15)$$

In Verbindung ergeben Kondensatorgleichung und Ohmsches Gesetz eine *Differentialgleichung* 1. Ordnung, Gl. (2-15), deren Lösung Gl. (2-16) eine *Exponentialfunktion* (siehe unten) ist: eine Funktion, die mit konstanter *relativer* Steigung asymptotisch gegen Null läuft.

Der Faktor RC wird als Zeitkonstante τ bezeichnet, denn je größer das Produkt von R und C ist, desto länger dauert der Entladevorgang.

Spannungs- und Stromverlauf sind analog zum zeitlichen Verlauf des Drucks und der Durchflußmenge eines Gases, das aus einem Druckbehälter ausströmt. Der Kapazität analog ist das Behältervolumen, und dem Widerstand analog ist die Weite der Ausströmöffnung.

Anmerkungen zur e-Funktion

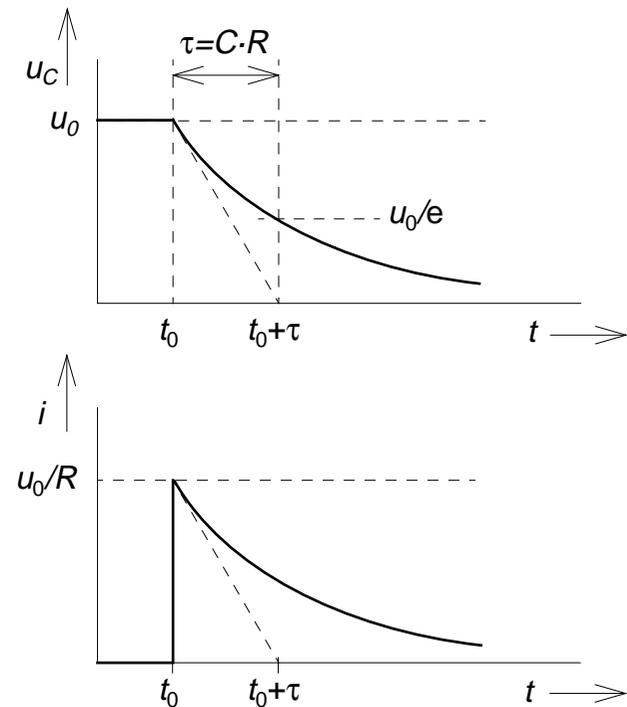
Mathematisch zeichnet sich die Exponentialfunktion (kurz e-Funktion, $e = 2,718\dots$, Eulersche Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus) dadurch aus, daß ihre Ableitung (Steigung) wiederum eine Exponentialfunktion mit demselben Argument ergibt, Gl. (2-17). Die Steigung ihres Funktionsgraphen ist damit an jedem Abzissenwert proportional zum Ordinatenwert. Die Exponentialfunktion bietet sich daher als Lösung für Differentialgleichungen 1. Ordnung an, d.h. Gleichungen in denen eine Funktion allein mit ihrer eigenen 1. Ableitung verknüpft ist.

Legen wir eine Tangente bei einem beliebigen Abzissenwert x_1 an einen Funktionsgraphen e^{-ax} an, dann schneidet diese Tangente die Abzisse *immer* bei (x_1+1/a) ! Der Argumentfaktor a einer als Graf gegebenen Exponentialfunktion kann auf diese Weise grafisch ermittelt werden.

In allen sich selbst regulierenden Systemen folgen Wachstums- und Schrumpfungsprozesse, die durch eine solche Differentialgleichung beschrieben werden können, in erster Linie einem exponentiellen Verlauf. Dies gilt genauso für sich selbst regulierende Auffüll- und Entleerungsprozesse. Beim Aufladen und Entladen eines Kondensators ist die Selbstregulierung gegeben, indem der Lade- oder Entladestrom jeweils vom momentanen Ladezustand bestimmt wird.

$$u_C = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2-16)$$

$$i_R = \frac{u_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \frac{d}{dx} e^{-ax} = -a \cdot e^{-ax} \quad (2-17)$$

2.3.3 Ladevorgang

In entsprechender Weise kann der Ladevorgang eines Kondensators behandelt werden: Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Kondensator über einen Schalter mit einer Ladespannungsquelle verbunden. Der in den Ladestromkreis eingeschaltete Widerstand trägt dem Umstand Rechnung, daß reale Stromkreise immer widerstandsbehaftet sind.

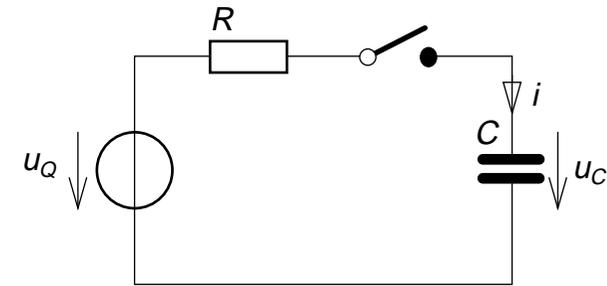
Die Spannung, die den Stromfluß treibt, ist die Differenz zwischen der Quellenspannung u_Q und der momentanen Ladespannung des Kondensators u_C . Dies läßt sofort zwei Schlußfolgerungen zu:

1. u_C kann nie größer als u_Q werden, und
2. die den Ladevorgang treibende Differenzspannung $u_Q - u_C$ wird mit zunehmender Aufladung des Kondensators immer niedriger.

Auch der Ladevorgang wird also einen asymptotischen Verlauf haben. Für die Aufstellung der Differentialgleichung Gl. (2-20) bemühen wir zunächst das Ohmsche Gesetz entsprechend Gl. (2-18): Nur die Differenzspannung $u_Q - u_C$ kann den Ladungsstrom durch den Widerstand R treiben. Der Ladestrom ist andererseits für die Zunahme der Kondensatorspannung du_C/dt verantwortlich (das Vorzeichen in Gl. (2-19) ist positiv, da eine Energieaufnahme stattfindet!).

Die Lösung der resultierenden Differentialgleichung ist wieder eine Exponentialfunktion, Gl. (2-21). Diesmal beginnt sie bei $u_C=0$ (Anfangszustand des Kondensators ungeladen) und läuft asymptotisch gegen u_Q , siehe Grafik auf der folgenden Seite. Die Zeitkonstante RC bestimmt wieder die Geschwindigkeit des Vorgangs.

Um den Ladestrom zu bestimmen, greifen wir auf Gl. (2-18) zurück: Der exponentielle Verlauf des Ladestroms nach Gl. (2-22) wird auch aus dem Spannungsverlauf plausibel, denn $u_Q - u_C$ ist die jeweils noch fehlende Ladespannung, die exponentiell *abnimmt*.



$$i = (u_Q - u_C) / R \quad (2-18)$$

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (2-19)$$

$$\frac{d}{dt}u_C + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{1}{RC} \cdot u_Q \quad (2-20)$$

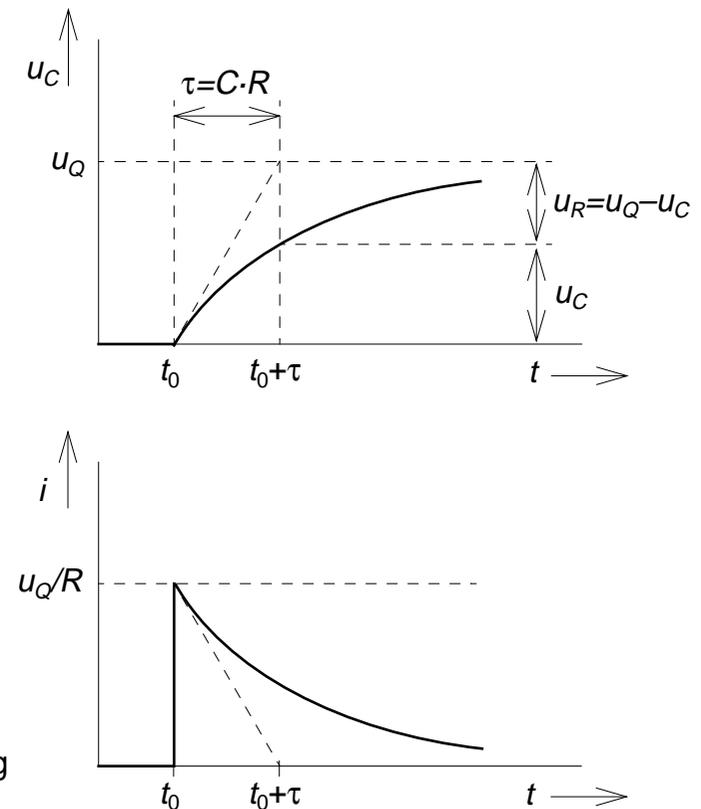
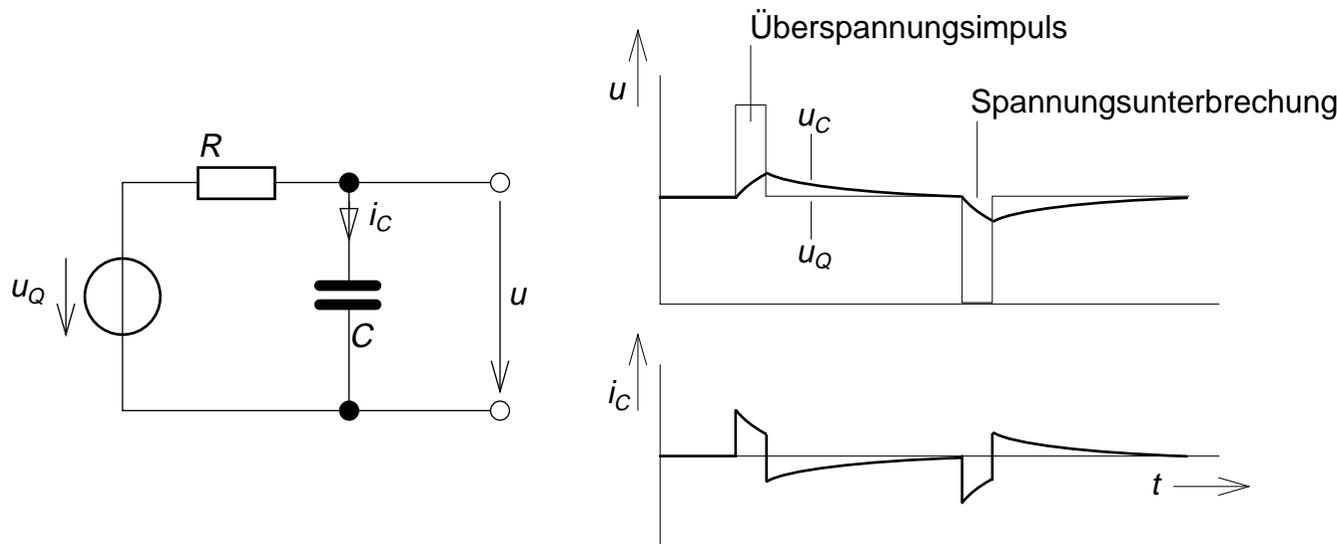
$$u_C = u_Q \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (2-21)$$

$$i = \frac{u_Q - u_C}{R} = \frac{u_Q}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2-22)$$

2.3.4 Beispiel einer Anwendung

Nützlich können Kondensatoren dank ihres Energiespeichereffekts sein, um den zeitlichen Verlauf einer Spannungsversorgung zu „glätten“. Bei einer kurzzeitigen Spannungsunterbrechung springt der Kondensator in die Bresche. Kurzzeitige Überspannungen „federt“ die Trägheit des Lade-/Entladevorgangs ab. Der unten gezeigte Spannungsverlauf u_Q der Quelle bewirkt eine Folge von Lade- und Entladevorgängen. Strom fließt abwechselnd in den Kondensator hinein (Aufladung: i_C positiv) und aus ihm heraus (Entladung: i_C negativ).

Kondensatoren finden wir deshalb in jeder Einrichtung für die Betriebsspannungsversorgung von Elektronikschaltungen, die im allgemeinen empfindlich auf impulsförmige Betriebsspannungsschwankungen reagieren. Der Glättungskondensator wird zu diesem Zweck über die Ausgangsklemmen der Spannungsquelle (d.h. *parallel* zum hier nicht eingezeichneten Verbraucher) geschaltet und ergibt zusammen mit dem Innenwiderstand der Quelle ein „Filter“ für den Gleichanteil der gestörten Quellenspannung (siehe dazu Abschnitt 5.1.2 auf Seite 68 und Abschnitt 7 auf Seite 105).



Übungsangaben zu den Themen

- Kondensator allgemein ab Seite 141
- Lade- und Entladevorgänge ab Seite 158

3 Magnetisches Feld, Lorentzkraft, Induktion

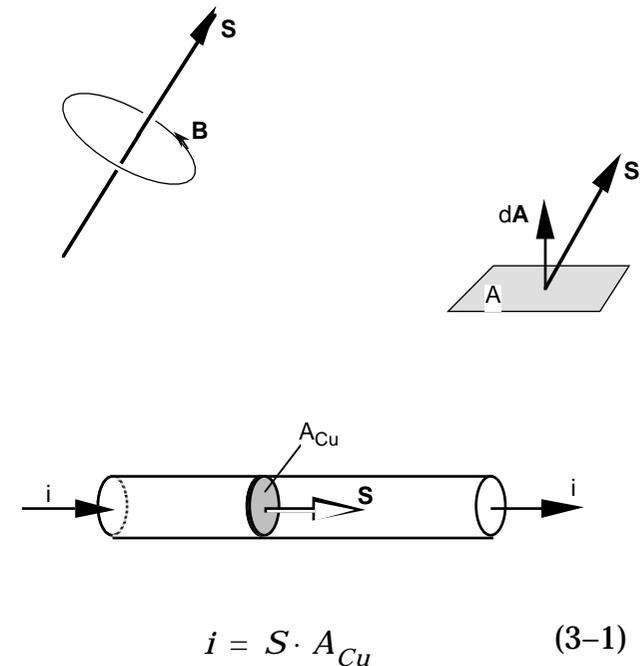
Technisch noch bedeutungsvoller als die elektrischen Feldgrößen E und D ist ein zweites Paar von Feldgrößen, die *magnetischen* Feldgrößen H und B , die auf die *Bewegung* von Ladungsträgern (z.B. Strom in einem Leiter) zurückzuführen sind. Eine Ladungsträgerbewegung hat die Ausbildung eines magnetischen Feldes zur Folge. Bewegen sich Ladungsträger wiederum durch ein Magnetfeld, so erfahren sie eine *Kraftwirkung*. Auf dieser Grundlage beruhen u.a. die energietechnisch wichtigen elektromechanischen Umsetzungsmechanismen in elektrischen Generatoren und Elektromotoren.

3.1 Magnetische Feldstärke, magnetische Flußdichte

Die für die Kraftwirkung verantwortliche Feldgröße ist die *magnetische Flußdichte* B . Das B -Feld ist ein „Wirbelfeld“ im Gegensatz zum E -Feld, das ein „Quellenfeld“ ist. D.h. magnetische Feldlinien sind immer geschlossen – jede B -Feldlinie kehrt in ihren Ausgangspunkt zurück –, während E -Feldlinien zwischen entgegengesetzt geladenen Teilchen („Feldlinienquellen“) aufgespannt sind, also Anfang und Ende besitzen.

Verursacht wird der „Wirbel“ durch *Bewegung* elektrischer Ladungsträger (auch beim Permanentmagneten, wie wir später sehen werden): Eine Ladungsträgerströmung S läßt um sich herum ein magnetisches Feld entstehen. S ist die Stromdichte: ein Vektor, der angibt, mit welcher Dichte und Richtung sich Ladungsträger bewegen.

Anschaulich wird die Stromdichte, wenn der Ladungsträgerstrom in einem isolierten Leiter der Querschnittsfläche A_{Cu} konzentriert ist, innerhalb der die Stromdichte S konstant ist. Dann ist das Produkt aus Stromdichte und Querschnittsfläche ganz einfach der Gesamtstrom i durch diesen Leiter, Gl. (3–1).



$$i = S \cdot A_{Cu} \quad (3-1)$$

Wozu nun die Definition einer weiteren Größe \mathbf{S} ? Ladungsträgerströme sind nicht immer konzentriert und auch nicht immer homogen. Eine allgemeinere Definition des „Stroms“ wird daher benötigt, um einen formalen Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld und der verursachenden Ladungsträgerströmung aufzustellen. Ursache für ein Magnetfeld an einem bestimmten Punkt im Raum ist nämlich immer die *Gesamtheit* von Ladungsträgerbewegungen durch die Fläche, die von der (geschlossenen!) Feldlinie durch diesen Punkt aufgespannt wird. Wir nennen diese Gesamtheit von Ladungsträgerbewegungen durch eine bestimmte Fläche A die *Durchflutung* Θ dieser Fläche. Wir erhalten Θ durch Aufsummieren aller Strömungspfade, die die Fläche durchsetzen oder – allgemein – durch (richtungsabhängige!) Integration der Stromdichte über die Fläche, Gl. (3-2). Das Skalarprodukt des Stromdichtevektors \mathbf{S} und des Flächenvektors $d\mathbf{A}$ (siehe Seite 17) sorgt dabei dafür, daß nur die senkrecht auf der Fläche stehende \mathbf{S} -Komponente zum Ergebnis beiträgt.

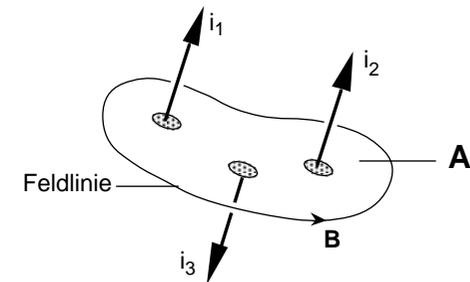
Ist der Strom in einem Leiter konzentriert, leistet nur dessen Schnittfläche einen Beitrag zum Integral, Gl. (3-3). Durchsetzen mehrere Leiter die betrachtete Fläche senkrecht wie skizziert, ist Θ die (richtungsberücksichtigende) Summe aller Ströme. Im skizzierten Fall gilt also Gl. (3-4). Dies wird von Bedeutung, wenn wir die Wirkung eines Bündels stromdurchflossener Leiter (einer „Spule“, siehe Seite 29) betrachten.

Wir möchten nun die magnetische Flußdichte \mathbf{B} , die durch eine Ladungsträgerströmung \mathbf{S} bewirkt wird, in Größe und Richtung im Raum um diese Strömung herum angeben können, also den Verlauf und die Dichte der \mathbf{B} -Feldlinien bestimmen. Wir kehren dazu den Weg um, indem wir von der Wirkung \mathbf{B} auf die Ursache \mathbf{S} zurückschließen, und betrachten zunächst den sehr einfachen Fall einer linienförmig konzentrierten Strömung, d.h. eines gestreckten dünnen Leiters, der von einem Strom i durchflossen wird: Die \mathbf{B} -Feldlinien um diesen Leiter herum sind konzentrische Kreise um die Leitermittellachse.

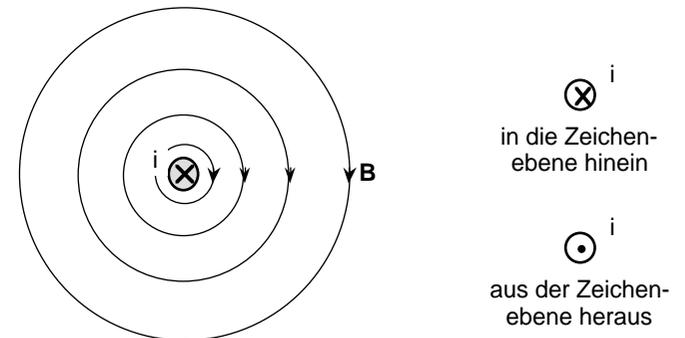
Bezüglich der Richtungsdefinition gilt die *Rechtsschraubenregel*.

$$\Theta = \int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} \quad (3-2)$$

$$\Theta = \int_{A_{\text{Luft}}} \mathbf{S} d\mathbf{A} + \int_{A_{\text{Cu}}} \mathbf{S} d\mathbf{A} = 0 + i \quad (3-3)$$



$$\Theta = i_1 + i_2 - i_3 \quad (3-4)$$



Natürlich haben auch hier wieder – wie beim elektrischen Feld – die Stoffeigenschaften des den Leiter umgebenden Mediums einen Einfluß. Davon werden wir zunächst unabhängig, wenn wir statt der magnetischen Flußdichte \mathbf{B} die *magnetische Feldstärke* \mathbf{H} einführen. \mathbf{B} ist über die *Permeabilitätskonstante* μ mit \mathbf{H} verknüpft, Gl. (3–5).

\mathbf{H} ist damit diejenige Feldgröße, die die Raumwirkung einer Ladungsträgerströmung beschreibt. \mathbf{H} und \mathbf{B} sind Vektoren mit *gleicher* Richtung, deren Betrag durch μ verknüpft ist. Für beide Größen ergibt sich also ein identischer Feldlinienverlauf.

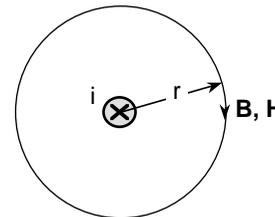
Gehen wir auf einer beliebigen \mathbf{H} -Feldlinie um den Leiter herum, dann muß die auf dem gesamten zurückgelegten Weg $2\pi \cdot r$ gemessene magnetische Feldstärke \mathbf{H} einen eindeutigen Rückschluß auf den verursachenden Strom zulassen. Gl. (3–6) beschreibt dies für eine konzentrische Feldlinien wie weiter unten hergeleitet. Um den Leiter herum ergibt sich also ein konzentrisches \mathbf{B} -Feld, das in seiner Stärke *reziprok* zum Abstand abnimmt, Gl. (3–7).

Im allgemeinen Fall sind elektrischer Strom und Magnetfeld, genauer Stromdichte \mathbf{S} und magnetische Feldstärke \mathbf{H} durch eine Integralgleichung verknüpft, Gl. (3–8). Sie besagt folgendes: Eine Fläche A sei von einer Ladungsträgerströmung mit der örtlichen Stromdichte \mathbf{S} durchsetzt. Gehen wir nun um den Rand dieser Fläche einmal vollständig herum (Umlaufweg l) und summieren dabei die in Wegrichtung $d\mathbf{s}$ liegende Komponente von \mathbf{H} auf, dann ist dies ein Maß für die Summe aller *senkrechten* Stromkomponenten $\mathbf{S}d\mathbf{A}$ innerhalb der umlaufenen Fläche.

Die Lösung dieser Integralgleichung wird einfach, wenn die geometrischen Verhältnisse einfach zu beschreiben sind, d.h. wenn einerseits die Feldlinien einfach beschreibbaren, ebenen geometrischen Figuren folgen und andererseits die Fläche, die diese Figur aufspannt, zerlegbar ist in Teilflächen mit jeweils konstanter Stromdichte. Eine solche spezielle Lösung dieser Gleichung war der oben behandelte Fall des dünnen, gestreckten, stromdurchflossenen Leiters. Die Lösung der Differentialgleichung (3–8) ergibt nach der Herleitung (3–9) die oben aufgestellte Beziehung Gl. (3–6).

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (3-5)$$

$$B = \mu \cdot H \quad \angle \mathbf{B} = \angle \mathbf{H}$$



$$i = 2\pi r \cdot H \quad (3-6)$$

$$B = \mu \cdot \frac{1}{2\pi r} \cdot i \quad (3-7)$$

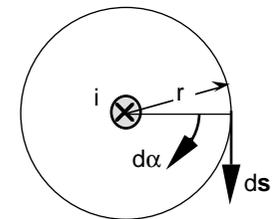
$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} \quad (3-8)$$

$$\int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} = \Theta = i$$

$$d\mathbf{s} = r \cdot d\alpha$$

$$\mathbf{H} d\mathbf{s} = H \cdot r d\alpha$$

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{s} = Hr \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = H \cdot r \cdot 2\pi \quad (3-9)$$



3.2 Der magnetische Fluß

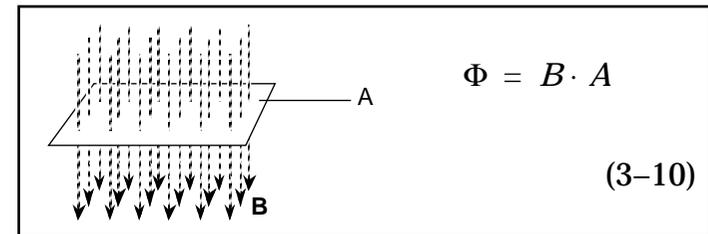
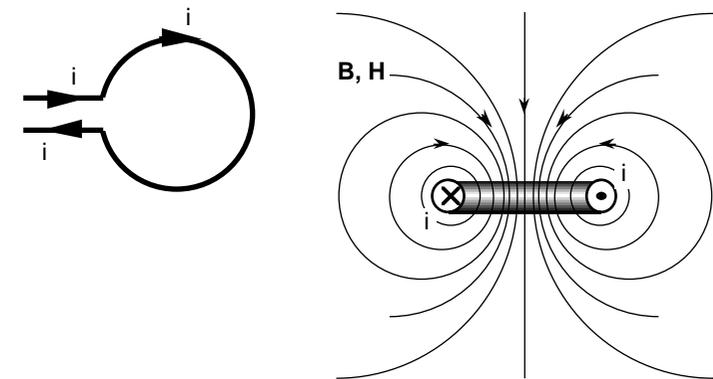
Der bisher betrachtete unendlich lange, gestreckte stromdurchflossene Leiter ist eine Abstraktion. Ströme fließen, wie wir gelernt haben in *Stromkreisen*, i . Die Leiterschleife umfaßt daher das magnetische Feld, das der durch sie fließende Strom verursacht, vollständig, d.h. alle magnetischen Feldlinien (die ja jeweils wieder in sich geschlossene Bahnen darstellen), durchtreten einmal (und *nur* einmal!) die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche. Am Beispiel einer kreisförmigen Stromschleife wird dies anschaulich.

Für die Gesamtheit der magnetischen Flußdichte, die eine abgegrenzte Fläche A durchtritt, führen wir den Begriff *magnetischer Fluß* Φ ein. In einem homogenen Feld ist Φ einfach das Produkt aus Fläche und Betrag der magnetischen Flußdichte B (vorausgesetzt die Feldlinien treten senkrecht durch die Fläche!), Gl. (3-10).

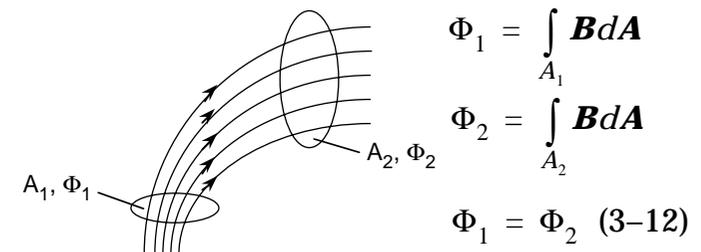
Für die allgemeine Definition des magnetischen Flusses müssen wir die Ortsabhängigkeit von Betrag und Richtung des Flusses berücksichtigen und kommen daher wieder zu einer Integralgleichung, Gl. (3-11). Damit ist die Relation von \mathbf{B} und Φ analog zur Relation von \mathbf{S} und i , Gl. (3-2) auf Seite 26.

Wie auch der elektrische Strom in einem Stromkreis durch einen Querschnitt des Leiters an beliebiger Stelle immer der gleiche ist, gegeben nämlich durch das Integral über alle Stromdichtelinien, die die Querschnittsfläche des Leiters (gleich wie dieser geformt ist) durchsetzen, so ist auch der magnetische Fluß eines Bündels von \mathbf{B} -Feldlinien überall gleich, Gl. (3-12).

Der magnetische Fluß durch die von der Leiterschleife aufgespannte Fläche ist also damit ein bestimmendes Maß für das Magnetfeld, das der Leiterstrom im Raum um die Leiterschleife herum verursacht. Den Zusammenhang zwischen Strom (oder allgemeiner: Durchflutung) und magnetischem Fluß wollen wir nun herleiten. Dies wird besonders einfach, wenn wir uns zuvor mit dem Begriff des *magnetischen Leiters* befassen.



$$\Phi = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (3-11)$$



3.3 Magnetische Leiter – magnetischer Widerstand

Die magnetische Flußdichte \mathbf{B} , die aufgrund einer gegebenen magnetischen Feldstärke \mathbf{H} verursacht wird, ist gemäß Gl. (3–5) auf Seite 27 von der Permeabilität des Mediums abhängig, in dem sich das Feld ausbreitet. Es erweist sich als praktisch, die magnetischen Eigenschaften eines Materials auf die Permeabilitätskonstante μ_0 von Vakuum zu beziehen, Gl. (3–13), d.h. als *relative* Permeabilitätskonstante μ_r anzugeben, da sich die meisten Stoffe in magnetischer Hinsicht wie Vakuum oder zumindest sehr ähnlich verhalten (relative Permeabilitätskonstante $\mu_r \approx 1$). Die sogenannten *ferromagnetischen* Stoffe mit ihrem bekanntesten Vertreter, dem Eisen (daher der Name), bilden eine Ausnahme: Hier ist μ_r groß gegen 1, z.B. 100...1000.

Stellen wir aus einem hochpermeablen Eisen einen ringförmigen „Kern“ her, um den wir unsere stromdurchflossene Leiterschleife legen, dann werden die magnetischen Feldlinien, die die Innenfläche der Leiterschleife durchsetzen, vorzugsweise im Material des Eisenkerns ihre geschlossenen Bahnen einnehmen. Der Eisenkern ist also eine Art „magnetischer Leiter“.

Mit magnetischen Leitern können wir den Verlauf eines Magnetfeldes *kontrollieren*, so daß die Umlauflänge der Feldlinien (näherungsweise) bekannt ist. Im Fall des Torus ist die Umlauflänge einer mittleren Feldlinie gleich dem Umfang der Mittellinie des Torus. Bei einem Torus mit gleichbleibendem Kernquerschnitt ist überdies die magnetische Flußdichte auf der Umlaufbahn konstant. Damit ergibt sich mit Gl. (3–14) eine sehr einfache Lösung für das Feldlinienintegral, der linken Seite von Gl. (3–8) auf Seite 27.

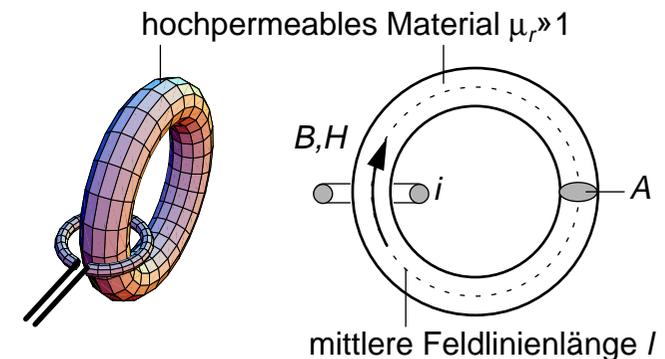
Eine einfache Lösung ergibt sich auch für das Stromdichteintegral, der rechten Seite von Gl. (3–8): Für den Fall, daß der Eisenkern von einem Leiter n -fach umschlungen ist („Spule“), trägt derselbe Strom n -fach zur Durchflußung Θ bei, Gl. (3–15).

3.3 Magnetische Leiter – magnetischer Widerstand

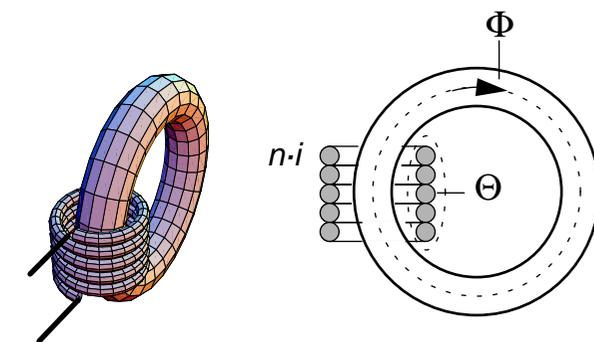
$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} \quad (3-13)$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T (Tesla)}$$

$$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \mu_{r(\text{Luft})} = 1 \quad \mu_{r(\text{Eisen})} \gg 1$$



$$\oint_l \mathbf{H} ds = H \cdot l \quad (3-14)$$



$$\int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} = \Theta = n \cdot i \quad (3-15)$$

Nun lassen sich die Beziehungen zwischen den magnetischen Größen nach Gl. (3–14) und den elektrischen Größen nach Gl. (3–15) zu einer einfachen Beziehung zwischen magnetischem Fluß und elektrischer Durchflutung zusammenfügen: Aus der allgemeinen Integralgleichung Gl. (3–8) wird Gl. (3–17). Φ und Θ sind darin lediglich über die geometrischen Abmessungen und die Permeabilitätskonstante miteinander verknüpft!

Bei einer gegebenen Durchflutung wird der magnetische Fluß umso größer, je größer der Eisenquerschnitt A und die Permeabilität μ_r sind, und um so kleiner, je länger der Weg l durchs Eisen wird. Der Eisenkern bietet also eine Art Widerstand für die Feldausbreitung, den wir den *magnetischen Widerstand* R_m nennen wollen, nicht zuletzt, weil seine Definition gemäß Gl. (3–18) eine Analogie zum elektrischen Widerstand nahelegt, siehe Gl. (1–16) auf Seite 11. In Analogie zum Ohmschen Gesetz des elektrischen Kreises, Gl. (1–14) läßt sich somit ein „Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises“ formulieren: Der magnetische Fluß ist gemäß Gl. (3–19) proportional zur Durchflutung und umgekehrt proportional zum magnetischen Widerstand. Darin entspricht die Durchflutung als Ursache für den magnetischen Fluß der elektrischen Spannung, die die Ursache für einen elektrischen Strom ist.

Wohlgedenkt gilt dies nur unter der Voraussetzung, daß *alle* Feldlinien im Kern eingeschlossen sind. Dazu müßte μ_r unendlich groß sein. Im Realfall existiert um den Eisenkern herum ebenfalls ein Feld, das „Streufeld“, das bei einer exakten Berechnung berücksichtigt werden müßte. Je größer allerdings μ_r , desto genauer gilt Gl. (3–18) als Näherungslösung.

3.3.1 Eisenkern mit Luftspalt

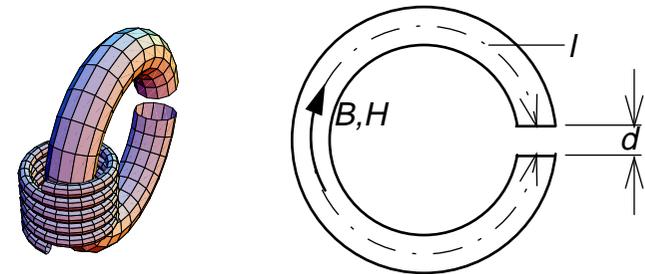
Für technische Anwendungen, bei denen die Kraftwirkungen im magnetischen Feld genutzt werden sollen (siehe Seite 31 ff), ist es erforderlich, daß sich elektrische Leiter in einem magnetfelderfüllten Raum frei bewegen kön-

$$H \cdot l = \Theta \quad (3-16)$$

$$\Phi = B \cdot A = \mu \cdot H \cdot A = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A}{l} \cdot \Theta \quad (3-17)$$

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l}{A} \quad (3-18)$$

$$\Phi = \frac{1}{R_m} \cdot \Theta \quad (3-19)$$



nen. Wenn zur Feldführung und Feldkonzentration ein Kern aus magnetisch „gut leitendem“ Material (z.B. Eisen) verwandt werden soll, dann muß das Material an mindestens einer Stelle aufgeschnitten werden, also ein *Luftspalt* eingefügt werden. Die magnetischen Feldlinien müssen dann auf der Luftspaltbreite d den höheren magnetischen Widerstand des nicht-eisengefüllten Raums überwinden.

Das Feldlinienintegral zerfällt also in zwei Abschnitte. Nun muß an den Grenzflächen zwischen Eisen und Luft die Kontinuität des magnetischen Flusses gewahrt bleiben. Diese Forderung hat eine um μ_r unterschiedliche magnetische Feldstärke zur Folge, Gl. (3–20).

In die effektive Feldlinienlänge und damit in den magnetischen Widerstand geht daher die Luftspaltbreite d stark überproportional ein. Luftspalte müssen also immer so knapp wie möglich dimensioniert werden.

Ein Eisenkern mit einem Luftspalt, versehen mit einer von einem *konstanten* Strom durchflossenen Spule, wirkt wie ein Permanentmagnet. In permanentmagnetischem Material addieren sich die magnetischen Flüsse subatomarer „Ladungskreisel“ (gleich ausgerichtete, nichtkompensierte Elektronenspin- und Elektronenbahnmomente) zu einem Gesamtfluß, der nach außen wirksam wird.

3.4 Kräfte im Magnetfeld

Magnete üben bekanntermaßen Kräfte aufeinander aus. Im Magnetfeld steckt also Energie. Ein stationäres Magnetfeld, erzeugt durch einen konstanten Strom in einer Spule, ändert seinen Energieinhalt nicht. Wenn das Feld aber aufgebaut wird, muß elektrische Energie *aufgebracht* werden. Gleichermäßen muß ein Feldabbau mit einer *Abgabe* von elektrischer Energie einhergehen.

Durch einen widerstandslosen Leiter einen Strom fließen zu lassen, kostet keinen Energieaufwand. Nehmen wir an, daß die Spule um einen Magnetkern herum idealer-

$$\Theta = \oint_{(l+d)} \mathbf{H} ds = (H_{\text{Eisen}} \cdot l) + (H_{\text{Luft}} \cdot d)$$

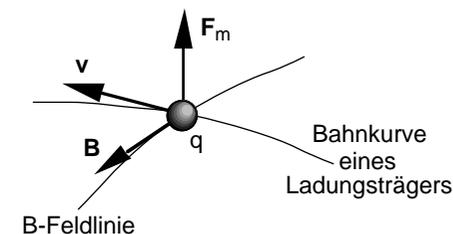
$$H_{\text{Luft}} = \frac{\Phi_{\text{Luft}}}{\mu_0 \cdot A} \quad H_{\text{Eisen}} = \frac{\Phi_{\text{Eisen}}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}$$

$$\Phi_{\text{Eisen}} = \Phi_{\text{Luft}} \rightarrow H_{\text{Eisen}} = \frac{1}{\mu_r} H_{\text{Luft}}$$

$$\Theta = H_{\text{Eisen}} \cdot (l + d \cdot \mu_r)$$

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l + d \cdot \mu_r}{A} \quad (3-20)$$

weise widerstandslos sei, dann würde ein einmal in Gang gesetzter Stromfluß nach dem Kurzschließen der beiden Anschlußklemmen weiterfließen – und das mit ihm verknüpfte Magnetfeld würde bestehen bleiben (ein Umstand übrigens, den man bei supraleitenden Magneten technisch nutzt!). Die Spule kann nur dann eine elektrische Energie aufnehmen, wenn sich dem Strom beim *Feldaufbau* über ein endliches zeitintervall eine Spannung entgegengesetzt (siehe Seite 10 „Energiezuwachs...“). Es muß also bei einer *Änderung* des magnetischen Feldes in einer Spule zu einer Kraftwirkung auf die Ladungsträger im Leiter der Spule kommen! Eine solche Kraft auf Ladungsträger würde beim *Feldabbau* folgerichtig *in* Richtung des Stromflusses wirken und in diesem Fall zu einer elektrischen Energie*abgabe* führen. Verantwortlich für den gesuchten Effekt ist die Rückwirkung des Magnetfeldes auf elektrische Ladungsträger.



3.4.1 Die Lorentzkraft

Auch im Magnetfeld erfahren Ladungsträger eine Kraftwirkung, im Gegensatz zum elektrischen Feld jedoch nur, wenn sie sich *quer* zu den Feldlinien *bewegen*. Sie erfahren dann eine Kraft, die sie aus ihrer Bewegungsrichtung ablenkt. Die Ablenkkraft steht dabei *senkrecht* auf der Ebene, die der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und Vektor der magnetischen Flußdichte \mathbf{B} aufspannen. Sie ist am größten, wenn \mathbf{v} gerade senkrecht zu \mathbf{B} verläuft. Sie ist Null, wenn sich der Ladungsträger genau in Feldrichtung bewegt. Diese Beziehung wird durch das *Vektorprodukt* Gl. (3–21) beschrieben.

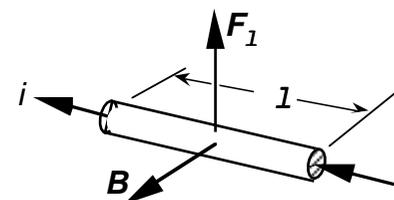
$$\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3-21)$$

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \angle(v, B)$$

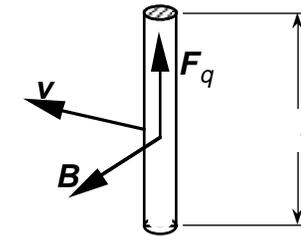
Für die Richtungsdefinition der am Vektorprodukt beteiligten vektoriellen Größen gilt wiederum die Rechtsschraubenregel: \mathbf{F} zeigt in die Vorschubrichtung, wenn \mathbf{v} in \mathbf{B} hineingedreht wird. Siehe auch Seite 26.

Zweierlei Nutzen kann aus dieser Wechselwirkung gezogen werden:

1. Ein stromdurchflossener Leiter, der *senkrecht* zum Magnetfeld gespannt ist, erfährt eine Kraft, denn in ihm bewegen sich Ladungsträger senkrecht zum \mathbf{B} -Feld. Hierauf basiert u. a. das Prinzip des elektrischen *Motors*.



2. Wird ein Leiter, der senkrecht zum Magnetfeld gespannt ist, mit seiner Achse quer zum Magnetfeld bewegt, dann erfahren alle Ladungsträger in ihm eine Kraft in Richtung der Leiterachse. Sie werden also „unter Spannung“ gesetzt (analog der Kraft F_e , die im elektrischen Feld des Kondensators auf die Ladungsträger wirkt und somit eine Spannung zwischen den Kondensatorplatten herstellt). Das Magnetfeld induziert also eine Spannung im bewegten Leiter. Hierauf basiert u.a. das Prinzip des elektrischen *Generators*.



Die grundlegenden Formeln für diese beiden speziellen Situationen sollen im folgenden hergeleitet werden.

3.5 Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter

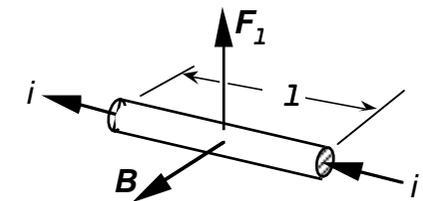
Wenn sich ein Leiter, in dem der Strom i fließt, auf einer Länge l in einem homogenen Magnetfeld befindet, dessen Feldlinien den Leiter *senkrecht* schneiden, summieren sich die Kräfte auf alle Ladungsträger, die durch den Leiter strömen, zu einer Gesamtkraft auf den Leiter. Diese kann wie folgt berechnet werden: Der Strom i ist definiert durch eine Ladung q_l , die in einer Zeit Δt den Leiter passiert, siehe Gl. (1–3) auf Seite 9. q_l sei die Summe aller strömenden Ladungsträger, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb des das Magnetfeld durchschneidenden Leitersegments der Länge l befinden. Dann ist deren mittlere Driftgeschwindigkeit durch die Passagezeit Δt über die Leiterlänge l gegeben. Daraus errechnet sich die Kraft auf den Leiter nach Gl. (3–22). F_m wirkt nach Gl. (3–21) *senkrecht* auf die Leiterachse (Bewegungsrichtung der Ladung) und möchte den Leiter *senkrecht* zur Feldrichtung verschieben.

Über die Raumrichtung der Kraft gibt Gl. (3–22) keine Auskunft. Sie muß über eine Betrachtung der Vektorgleichung Gl. (3–21) ermittelt werden: Die Anwendung der Rechtsschraubenregel ergibt, daß F_m in die Vorschubrichtung zeigt, wenn der Leiter, in positiver Stromrichtung betrachtet, in die B -Feldlinien hineingedreht wird.

$$q_l = i \cdot \Delta t$$

$$v = \frac{l}{\Delta t}$$

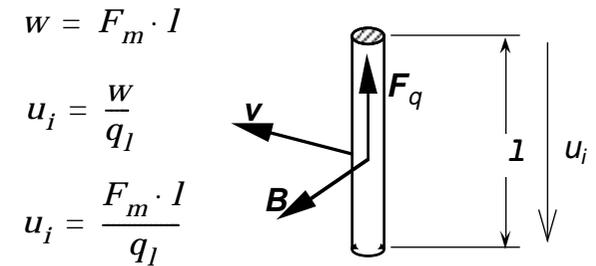
$$q_l \cdot v = i \cdot l$$



$$F_m = B \cdot i \cdot l \quad (3-22)$$

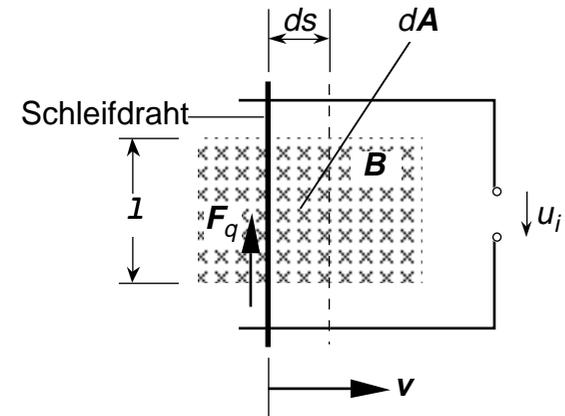
3.6 Induzierte Spannung

Bewegen wir nun einen Leiter der Länge l , der senkrecht zum Magnetfeld orientiert ist, mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht zu seiner Längsachse *und* senkrecht zu den Feldlinien durch das Magnetfeld, dann nehmen alle freien Ladungsträger q_l in ihm infolge der Kraft, die nun in Richtung der Leiterachse über die Länge l wirkt, eine Energie w auf (Kraft mal Weg!). Bezogen auf die Ladung q_l ergibt dies mit Gl. (1-1) auf Seite 6 eine Spannung u_i gemäß Gl. (3-23), die durch eine Bewegung im Magnetfeld *senkrecht* zu den Feldlinien „induziert“ wird. Bezüglich der Richtung gilt das gleiche wie oben (Rechtsschraubenregel!). Der Spannungspfeil nach Definition auf Seite 13 zeigt der verursachenden Kraft entgegen.



$$u_i = v \cdot B \cdot l \quad (3-23)$$

Wollen wir die induzierte Spannung nutzen, dann müssen wir den Leiter über einen Verbraucher zu einem *Stromkreis* schließen. Da sich mindestens ein Teilstück der so entstehenden Leiterschleife, in der eine Spannung induziert werden soll, in einem Magnetfeld befinden muß, wird die Schleife also von einem magnetischen Fluß Φ durchsetzt. Die absolute Größe von Φ ist offensichtlich uninteressant, da bei einer stationären Situation (stationäres Feld und unbewegter Leiter) keinerlei Wechselwirkung auftritt. Erst wenn wir die Leiterschleife (oder das Magnetfeld) so bewegen, daß das im Feld befindliche Teilstück dabei Feldlinien *schneidet*, wird eine Spannung induziert. Eine solche Bewegung hat zur Folge, daß sich die Gesamtheit der von der Schleife umfaßten Feldlinien, also der magnetische Fluß, der die Leiterschleife durchsetzt, verändert. D.h., die Induktion einer Spannung u setzt eine *zeitliche Veränderung* $d\Phi/dt$ des Flusses Φ durch die Schleife voraus!



$$v = \frac{ds}{dt} \quad l \cdot ds = dA$$

$$B \cdot dA = d\Phi$$

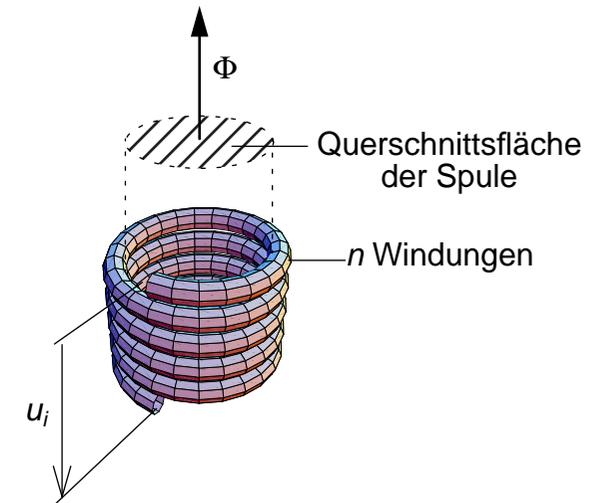
$$u_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3-24)$$

Da wir für die Herleitungen von Gl. (3–22) und Gl. (3–23) aus der grundlegenden Vektorbeziehung für die Wirkung eines Magnetfelds auf elektrische Ladungen Gl. (3–21) sehr einfache geometrische Verhältnisse (Rechtwinkligkeit der miteinander verknüpften Vektorgößen) angenommen haben, konnten wir sehr einfache skalare Gleichungen für die Kraftwirkung und für die induzierte Spannung formulieren. Aus diesen Gleichungen geht nun allerdings nicht mehr der Richtungssinn der Kraft bzw. der Spannung (d.h. deren Vorzeichen) hervor. Das Vorzeichen muß durch eine gesonderte Richtungsbetrachtung der involvierten Größen gefunden werden.

Eine spätere Plausibilitätsbetrachtung führt zu dem *negativen* Vorzeichen im Induktionsgesetz Gl. (3–24): Die Abgabe einer elektrischen Leistung (p ist definitionsgemäß negativ, wenn die Stromrichtung der im Leiterteilstück entstehenden Spannung entgegengerichtet ist) muß aus Gründen der Energieerhaltung mit einer *Abnahme* der im magnetischen Fluß verkörperten magnetischen Energie einhergehen.

Das Induktionsgesetz besagt, daß in einer Leiterschleife eine Spannung induziert wird, wenn sich der magnetische Fluß durch die Schleife *verändert*, unabhängig davon, ob dies die Folge einer Bewegung des Leiters, einer Bewegung des Feldes oder einer *Veränderung der Stärke* des \mathbf{B} -Feldes ist.

Ist die Leiterschleife n -fach um die flußdurchsetzte Fläche geschlungen (bildet sie also eine *Spule*), dann addieren sich alle der nach Gl. (3–24) in jeder einzelnen Windung induzierten Spannungen gemäß Gl. (3–25) zum n -fachen der Spannung einer einzelnen Windung.



$$u_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (3-25)$$

3.6.1 Selbstinduktion, Induktivität

Natürlich hat auch der magnetische Fluß, der gemäß Gl. (3–19) auf Seite 30 durch eine Spule selbst erzeugt wird, wenn sie von einem Strom i durchflossen wird, eine Induktionswirkung in eben dieser Spule zur Folge – wenn der magnetische Fluß sich zeitlich ändert, d.h. *wenn der Strom sich zeitlich ändert!* Eine Änderung des Stroms di bewirkt dabei eine Änderung des erzeugten magnetischen Flusses $d\Phi$. Eingesetzt in Gl. (3–25) ergibt sich

damit eine induzierte Spannung, die nach Gl. (3-26) in der Spule selbst durch ihren eigenen Strom verursacht wird.

Dieser Effekt wird „Selbstinduktion“ genannt. Die Verknüpfung zwischen Strom und selbstinduzierter Spannung ist lediglich durch den magnetischen Widerstand und die Windungszahl bestimmt. Den sich hieraus gemäß Gl. (3-27) ergebenden Faktor bezeichnen wir als „Selbstinduktivität“ (oder kurz *Induktivität*) L . Ihre Maßeinheit ist das „Henry“ (H); technisch relevant sind Spulen im mH- und μ H-Bereich.

Die Selbstinduktion bewirkt, daß sich dem Strom bei einer *Stromerhöhung* eine Spannung entgegensetzt! Wenn der Strom dagegen verringert wird, wirkt die induzierte Spannung in Stromrichtung, d.h. sie unterstützt den Stromfluß. In beiden Fällen „widersetzt“ sich die Leiterschleife der Veränderung des Stroms.

Sorgfältig müssen wir hierbei die Regeln, nach denen Strom- und Spannungspfeile gesetzt werden (siehe Seite 13), beachten: Der Spannungspfeil zeigt immer in Richtung des Energie-(Spannungs-)Abbaus. Wenn der Strompfeil dem Spannungspfeil *entgegengerichtet* ist (u und i mit gleichem Vorzeichen vorausgesetzt), erfahren die Ladungsträger auf ihrem Weg also einen *Energiezuwachs*, d.h. der Vorgang wirkt als *Spannungsquelle*. Gleiches gilt bei richtungsgleichen Pfeilen, wenn u und i gegensinnige Vorzeichen haben. Richtungsgleiche Pfeile und gleichsinnige Vorzeichen dagegen kennzeichnen einen Verbraucher, denn die Ladungsträger erfahren auf ihrem Weg einen *Energieabbau*. Siehe dazu auch die Darstellung auf Seite 47.

Obwohl die Erzeugung einer Spannung in einer Leiterschleife durch Induktion die Leiterschleife als Spannungsquelle wirken läßt, ist es im Fall der Selbstinduktion sinnvoll, die Leiterschleife, der in diesem Fall von außen her keine Energie zugeführt wird, wie einen Verbraucher zu behandeln, d.h. Spannungspfeil und Strompfeil richtungsgleich anzusetzen. Dann kehrt sich das Vorzeichen der Spannung folgerichtig um, so daß sich aus der Herleitung Gl. (3-26) für die induzierte (Quellen-)Spannung unter Einsetzen von Gl. (3-27) die „Verbraucher“-Spannung u_L gemäß Gl. (3-28) ergibt.

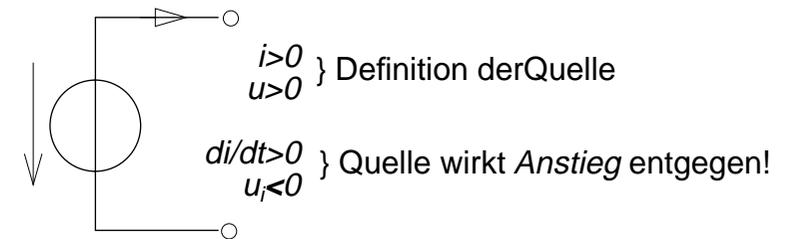
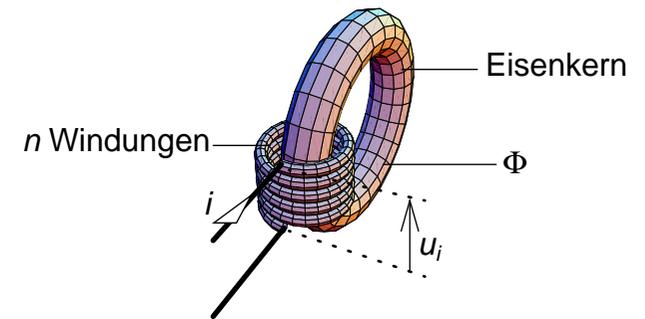
$$\Phi = \frac{1}{R_m} \cdot \Theta = \frac{n}{R_m} \cdot i$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{n}{R_m} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_i = -n \cdot \frac{n}{R_m} \cdot \frac{di}{dt} \quad (3-26)$$

$$L = \frac{n^2}{R_m} \quad (3-27)$$

$$[L] = \frac{Vs}{A} = \text{H (Henry)}$$



Strom und Spannung sind infolge der Selbstinduktion durch die Differentialgleichung Gl. (3–28) verknüpft. Ihre Umkehrfunktion, die Integralgleichung Gl. (3–29) beschreibt die Veränderung des Stroms, wenn im Integrationszeitintervall eine Spannung u_L angelegen hat.

Elektrische Bauelemente, die diesen Zusammenhang technisch nutzen, werden *Induktivitäten* oder *Spulen* genannt. Je nach gewünschter Induktivität L bestehen sie aus einzelnen Leiterwindungen oder Wicklungspaketen. Zur Erhöhung der Induktivität können sie auch einen Kern aus ferromagnetischem Material besitzen (Verringerung des magnetischen Widerstandes, siehe Seite 30). Insbesondere kann durch eine Konzentration des magnetischen Flusses auf einen geschlossenen hochpermeablen Kern ein Streufeld um die Spule vermieden werden, das zu unerwünschten Verkoppelungen mit Stromkreisen in der Nachbarschaft der Spule führen könnte (siehe 3.6.2 "Verkoppelte Spulen")

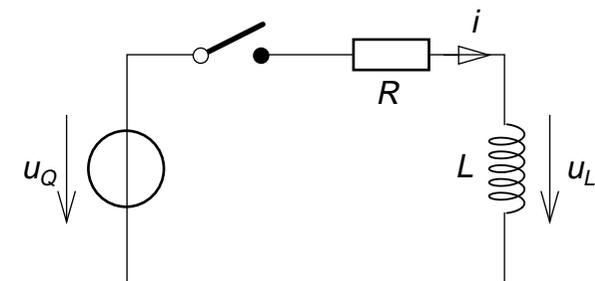
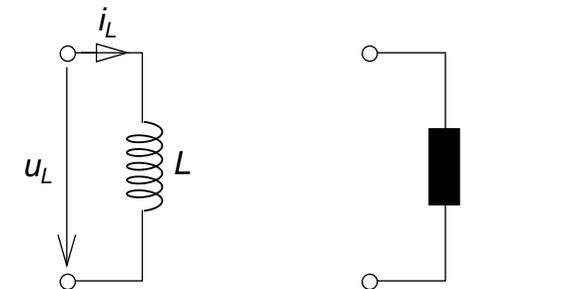
Blättern wir zurück zum Abschnitt 2.3.1 auf Seite 19 und vergleichen das Gleichungspaar (3–28) und (3–29) mit dem entsprechenden Gleichungspaar (2–13) und (2–14), das die Verknüpfung zwischen Spannung und Strom beim Kondensator beschreibt, dann fällt auf, daß hier Strom und Spannung ihre Rollen vertauscht haben. Induktivität und Kapazität (d.h. Spule und Kondensator) weisen ein *duales* Verhalten hinsichtlich ihrer Strom/Spannungs-Funktion auf.

Die technische Anwendung dieser Dualität soll noch etwas zurückgestellt werden. Nichtsdestoweniger lassen sich einige Konsequenzen schon mit einem einfachen Experiment darstellen: Gl. (3–28) sagt aus, daß Selbstinduktion *nicht* auftritt, solange der Strom durch einen Leiter (z.B. eine Spule) sich nicht verändert. Aber auch ein Gleichstrom muß irgendwann eingeschaltet werden und wird irgendwann wieder abgeschaltet werden. Beide Fälle werden im folgenden kurz behandelt.

Beim Einschalten eines Stromkreises mit einer Spule L verhindert die Selbstinduktion, daß sich der Strom i abrupt von Null auf seinen (konstanten) Endwert ändert. Solange der Strom anwächst, ist ihm eine (selbst-)induzierte Spannung u_L entgegengerichtet. Diese reduziert somit die Wirkung der Quellenspannung u_Q am Widerstand R , oder anders gesehen: Die Quellenspannung muß nicht nur gegen den Spannungs-

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad (3-28)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u_L \cdot dt \quad (3-29)$$



abfall im Widerstand u_R , sondern auch gegen die induzierte Spannung u_L anarbeiten, Gl. (3–30). Daraus resultiert – analog zur Kondensator-Ladeschaltung auf Seite 22 – eine Differentialgleichung. Auch hier ist die Lösung nach Gl. (3–31) eine Exponentialfunktion: In diesem Fall steigt der Strom mit stetig geringer werdender Zuwachsrates asymptotisch gegen seinen stationären Endwert. (Man beachte die Dualität zu Gl. (2–20) und Gl. (2–21) auf Seite 22!) Bei der Annahme, daß die Spule einen vernachlässigbar kleinen ohmschen Widerstand habe, ist der sich schließlich einstellende Gleichstrom lediglich durch den Vorwiderstand R gegeben.

Eine besondere Situation stellt sich ein, wenn der Schalter geöffnet wird. Logischerweise müßte dann in der minimalen Zeitspanne, während der der metallische Kontakt des Schalters gelöst wird, der Strom, der zu diesem Zeitpunkt floß, zu Null werden. Aus einer schnellen Abnahme des Stroms folgt aber nach Gl. (3–28) die Induktion einer hohen *negativen* Spannung, d.h. einer Spannung, die in Richtung des Stroms wirkt und ein Weiterfließen des Stroms bewirken möchte. Dieser Spannungsimpuls im Zeitpunkt des Schalteröffnens läßt zwischen den Schalterkontakten einen Lichtbogen entstehen. (Ein Lichtbogen bildet sich, wenn ein Gas infolge hoher *elektrischer* Feldstärke ionisiert und damit zu einem leitfähigen Plasma wird.) Der Lichtbogen wird solange aufrechterhalten, bis sich die vorher im magnetischen Feld gespeicherte Energie aufgezehrt hat, d.h. der Strom und der mit ihm verbundene magnetische Fluß zu Null geworden sind.

Eine der Kondensatorentladung entsprechende Situation (exponentieller Abbau des magnetischen Flusses und damit verbundenes Abklingen des Stroms) wäre gegeben, wenn der Stromkreis nicht geöffnet würde, sondern die Spannungsquelle ohne Unterbrechung des Stromkreises durch einen Kurzschluß ersetzt werden würde.

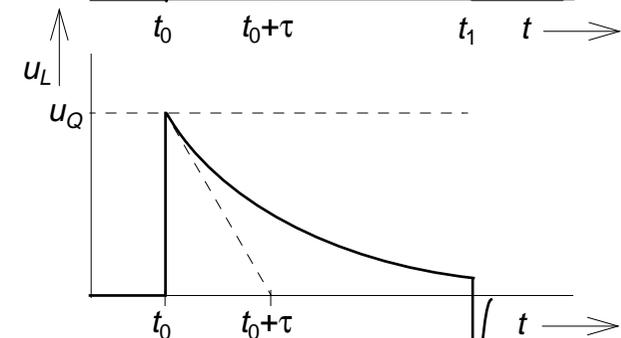
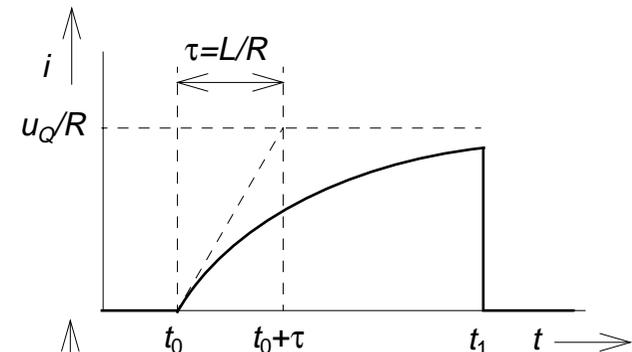
Induktivitäten sind also *Energiespeicher*. Die gespeicherte Energie ist im *magnetischen Feld* verkörpert. D.h., in einer Induktivität ist Energie gespeichert, solange ein *Strom* durch sie hindurchfließt.

Wieder finden wir beim Kondensator die dazu duale Gesetzmäßigkeit: Hier ist die gespeicherte Energie im *elektrischen Feld* verkörpert, d.h. in einer Kapazität ist Energie gespeichert, wenn zwischen den Platten eine *Spannung* herrscht.

$$u_L + u_R = u_Q \quad (3-30)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad u_R = R \cdot i$$

$$\frac{d}{dt}i + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot u_Q$$



$$i = \frac{u_Q}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \quad (3-31)$$

$$u_L = u_Q \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

3.6.2 Verkoppelte Spulen

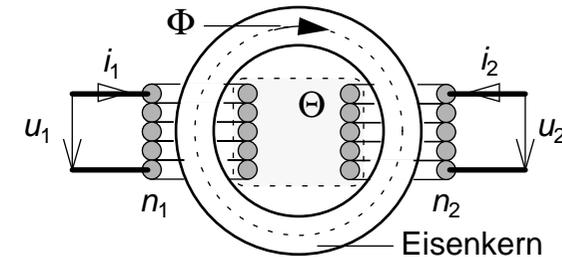
Besonderer Nutzen kann aus der Wechselwirkung zwischen magnetischem Feld und elektrischen Größen gezogen werden, indem das magnetische Feld elektrische Vorgänge in zwei elektrischen Stromkreisen miteinander verkoppelt, ohne daß diese miteinander *stromleitend* verbunden sind.

Schlingen wir zwei Leiterschleifen um denselben magnetischen Kreis, dann durchsetzt ein in dem magnetischen Kreis existierender Fluß beide Leiterschleifen gleichermaßen. (Wir setzen voraus, daß idealerweise keine der B-Feldlinien den Eisenkern verläßt, vernachlässigen also alle Streueffekte.)

Der magnetische Fluß im gemeinsamen Kern wird durch die *Summe* der Durchflutungen beider Spulen erzeugt, Gl. (3–32). Eine Flußänderung wiederum induziert gemäß Gl. (3–25) auf Seite 35 Spannungen gleichermaßen in beiden Spulen, unterschieden lediglich durch die jeweiligen Windungszahlen, Gl. (3–33). Das Minuszeichen aus Gl. (3–25) entfällt aufgrund der Umkehrung der Spannungsrichtung gegenüber der Festlegung auf Seite 36.

Wird nun in der Spule n_1 („Primärspule“) durch einen *veränderlichen* Stromfluß i_1 eine selbstinduzierte Spannung u_1 hervorgerufen, dann tritt in der Spule n_2 („Sekundärspule“) ebenfalls eine Spannung u_2 auf, die sich, wie aus Gl. (3–33) hergeleitet werden kann, von u_1 nur durch das Verhältnis der Windungszahlen unterscheidet: Gl. (3–34).

Die Abhängigkeit der Sekundärspannung u_2 vom Primärstrom i_1 finden wir, indem wir Gl. (3–32) – darin wird i_2 zu Null gesetzt, da der Sekundärkreis zunächst *offen* sein soll – und Gl. (3–33) miteinander verknüpfen. Wir erhalten Gl. (3–35), die sinngemäß auch bei einer Vertauschung der Rollen zwischen den beiden Spulen gilt. Darin sind bereits alle Faktoren zur sogenannten *Gegeninduktivität* M nach Gl. (3–36) zusammengezogen. Bei einer idealen Verkopplung der beiden Spulen (d.h. es existiert kein Streufluß) ist die Gegeninduktivität nach Gl. (3–37) das geometrische Mittel der Induktivitäten beider Einzelspulen, siehe Gl. (3–27) auf Seite 36.



$$\Phi = \frac{1}{R_m} \cdot \Theta = \frac{1}{R_m} (n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2) \quad (3-32)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{n_1} \cdot u_1 = \frac{1}{n_2} \cdot u_2 \quad (3-33)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3-34)$$

$$u_2 = n_2 \cdot \frac{1}{R_m} \cdot \frac{d\Theta}{dt} = \frac{n_2}{R_m} \cdot \frac{d}{dt} (n_1 i_1 + n_2 i_2)$$

$$u_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt} \quad (3-35)$$

$$M = \frac{n_1 \cdot n_2}{R_m} \quad (3-36)$$

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (3-37)$$

Wenn infolge eines Stroms durch die Primärspule die Sekundärspule zu einer Spannungsquelle wird, dann kann offensichtlich elektrische Energie von der Primärspule zur Sekundärspule übertragen werden, ohne daß zwischen dem Stromkreis auf der Sekundärseite und dem Stromkreis auf der Primärseite eine leitende (sogenannte „galvanische“) Verbindung besteht! Indem Spulen *magnetisch* miteinander verkoppelt werden, bietet das Induktionsgesetz die Möglichkeit, Stromkreise *galvanisch* zu entkoppeln. Voraussetzung ist allerdings, daß es sich bei den elektrischen Größen um *Wechselgrößen* handelt ($di/dt \neq 0$)!

Durch entsprechende Wahl des Windungszahlenverhältnisses können dabei Spannungen *übersetzt* oder *untersetzt*, d.h. „transformiert“ werden. Dies ist das Prinzip des *Transformators*, das nach Behandlung der Wechselstromnetzwerke in Abschnitt 6.8 auf Seite 99 wieder aufgegriffen werden wird.

3.7 Elektromechanische Wandler

Unter elektromechanischen Wandlern versteht man Mechanismen, die mechanische Energie in elektrische Energie oder elektrische Energie in mechanische Energie umsetzen. Technische Verbreitung haben vor allem Wandler auf der Basis der elektromagnetischen Wechselwirkungen gefunden. Ihr Aufbau ist grundsätzlich wie folgt: In dem Luftspalt eines magnetischen Kreises sind elektrische Leiter so angeordnet, daß sie sich quer zu den Feldlinien bewegen können:

1. Ein Stromfluß durch die Leiter erzeugt eine (mechanische) Kraft, die in eine Antriebsbewegung umgesetzt werden kann, siehe Gl. (3-22) auf Seite 33.
2. Eine Bewegung der Leiter induziert eine Spannung, so daß eine elektrische Quelle entsteht, siehe Gl. (3-23) auf Seite 34.

$$F_m = B \cdot i \cdot l$$

$$u_i = v \cdot B \cdot l$$

Im ersten Fall wird eine mechanische Leistung p_{mech} erbracht, wenn die Kraft zu einer Bewegung mit der Geschwindigkeit v führt, Gl. (3–38). Die Bewegung führt aber wiederum zu einer induzierten Spannung u_i , die dem Stromfluß entgegenwirkt. Einen Strom gegen eine Spannung zu treiben heißt, daß – analog zur Situation, wenn ein Strom durch einen ohmschen Widerstand getrieben wird, siehe Gl. (1–13) auf Seite 10 – eine elektrische Leistung p_{el} nach Gl. (3–39) aufzubringen ist. Gl. (3–38) und Gl. (3–39) zeigen, daß die abgegebene mechanische Leistung gleich der aufgenommenen elektrischen Leistung ist. (Elektrische und mechanische Verluste, d.h. ohmscher Widerstand und Reibung sind außer acht gelassen!).

Im zweiten Fall erfährt der Leiter bei einer Bewegung (die eine Spannung nach Gl. (3–23) induziert) eine Kraft gegen die Bewegungsrichtung, wenn infolge der induzierten Spannung ein Strom gemäß Gl. (3–40) fließt. Dies ist der Fall, wenn der bewegte Leiter mit einem Verbraucher (z.B. einem ohmschen Widerstand R) verbunden wird. Dann liefert der bewegte Leiter eine *elektrische* Leistung entsprechend Gl. (3–39). Eine gleichgroße *mechanische* Leistung entsprechend Gl. (3–38) muß dann durch die Bewegung gegen die Leiterkraft auf den Leiter aufgebracht werden.

Das Grundprinzip dieses elektromechanischen Wandlers ist also *reziprok*, d.h. umkehrbar.

Zwei Anwendungsbeispiele dieser elektromechanischen Wechselwirkungen sollen im folgenden dargestellt werden, um die technische Nutzung zu illustrieren, das *Tauchspulsystem* und die (rotierende) *elektrische Maschine*.

$$P_{mech} = F_l \cdot v = (i \cdot B \cdot l) \cdot v \quad (3-38)$$

$$P_{el} = u_i \cdot i = i \cdot (B \cdot l \cdot v) \quad (3-39)$$

$$P_{mech} \equiv P_{el}$$

$$i = \frac{u_i}{R} \quad (3-40)$$

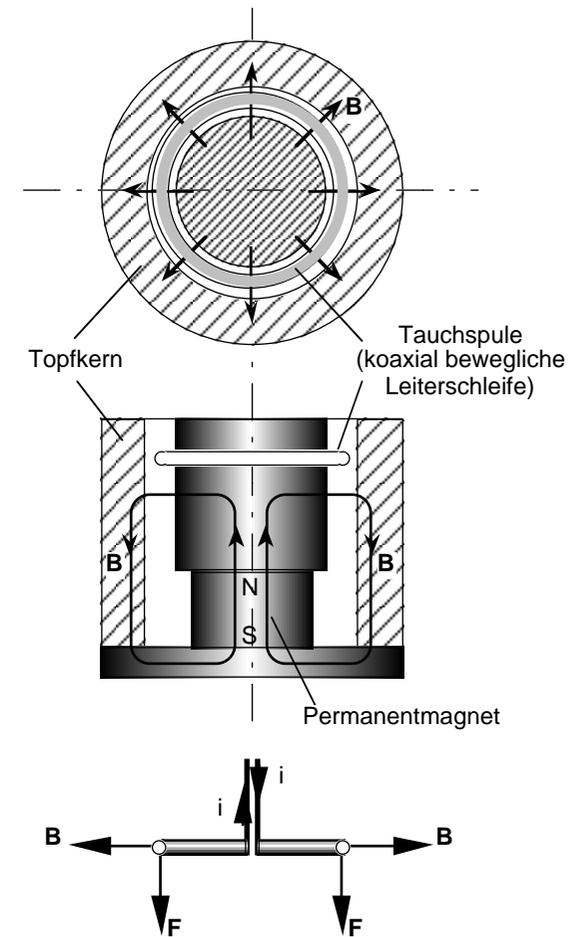
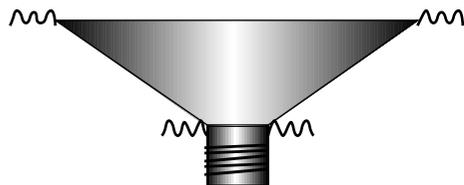
3.7.1 Tauchspulsystem

Der magnetische Kreis eines Tauchspulsystems besteht aus einem Hohlzylinder, einem darin konzentrisch angeordneten zylindrischen Kern sowie einer Bodenplatte als magnetischem Rückschluß. Der Kern ist in seinem unteren Bereich aus permanentmagnetischem Material. Die Feldlinien des Permanentmagneten schließen sich über den Luftspalt. Im Luftspalt herrscht also ein *radiales* Magnetfeld B .

Tauchen wir in den zylinderförmigen Luftspalt eine Leiterschleife, dann schneiden die magnetischen Feldlinien den Leiter auf seinem gesamten Umfang im rechten Winkel.

Lassen wir nun einen Strom i durch den Leiter fließen, wirkt eine Lorentzkraft nach Gl. (3-41) auf dem gesamten Leiterumfang senkrecht zur Leiter-schleifenebene.

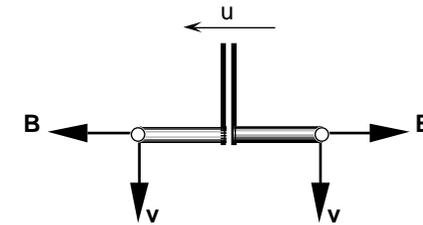
Verwendung findet dieses System z.B. in Lautsprechern. Ein dünner Kupferleiter ist auf ein dünnwandiges Isolierstoffrohr gewickelt, das sich frei in einem Luftspalt bewegen kann (die Anzahl der Windungen vervielfacht die Wirkung des Leiterstroms entsprechend). Diese Zylinderspule ist an der federnd aufgehängten Lautsprecher-membran befestigt. Wird die Spule von dem im Takt der akustischen Schwingungen wechselnden Ausgangsstrom eines Audioverstärkers durchflossen, dann setzen die verursachten Lorentzkräfte die Membran in entsprechende Bewegungen.



$$F = 2\pi r \cdot i \cdot B \quad (3-41)$$

Der reziproke Effekt ergibt sich, wenn wir die Tauchspule axial im Luftspalt bewegen. Der Geschwindigkeitsvektor steht auf dem gesamten Leiterumfang senkrecht zum B-Feld und senkrecht zur Ebene der Leiterschleife. Die Lorentzkraft wirkt nun tangential, d.h. in Richtung der Leiterachse, und induziert auf dem gesamten Leiterumfang eine Spannung u nach Gl. (3-42), die der Geschwindigkeit proportional ist.

Wird eine Tauchspule wie umseitig beschrieben mit einer federnd aufgehängten Membran verbunden, werden akustische Schwingungen in elektrische Spannungsschwingungen umgesetzt, die proportional zur Geschwindigkeit der Luft in Membrannähe sind: das Prinzip des elektrodynamischen Mikrophons!



$$u = -\frac{d}{dt}\Phi = -B \cdot \frac{dA}{dt} = -B \cdot 2\pi r \frac{ds}{dt} = -B \cdot 2\pi r \cdot v \quad (3-42)$$

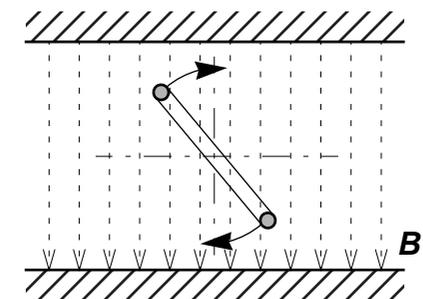
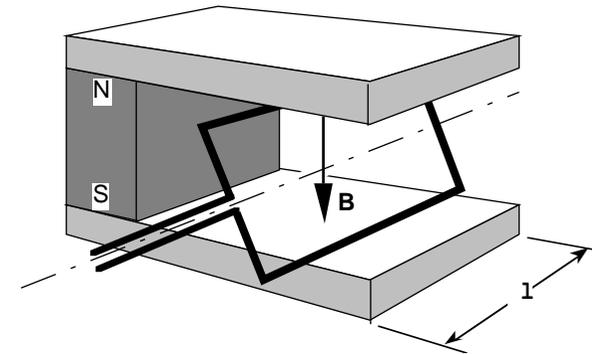
3.7.2 Elektrische Maschinen

Das Tauchspulensystem ist mechanisch einfach, hat aber einen Schönheitsfehler: Der bewegliche Teil – die Tauchspule – kann sich nicht kontinuierlich gleichförmig bewegen. Für (kompakte) elektromechanische Wandler, mit denen eine kontinuierliche und möglichst gleichförmige Wandlung bewirkt werden soll, müssen wir zu *rotierenden* Bewegungen übergehen.

Eine einfache, technisch nicht besonders wirkungsvolle Anordnung, an der sich die Vorgänge aber einfach beschreiben lassen, besteht aus einer rechteckigen Leiterschleife, die um ihre Längsachsen in einem homogenen (Permanent-) Magnetfeld rotieren kann.

Versetzen wir die Leiterschleife durch ein äußeres Drehmoment in Rotation, dann bewegen sich die zur Drehachse parallelen Leitersegmente so, daß eine Lorentzkraft in Leiterrichtung wirkt, also eine Spannung induziert wird.

Die Lorentzkraft ist dabei maximal, wenn sich die Leiterschleifenebene parallel zu den B-Feldlinien befindet. Sie wechselt ihr Vorzeichen (geht also durch Null), wenn die Leiterschleifenebene die Feldlinien gerade senkrecht schneidet.



Die induzierte Spannung ergibt sich aus dem Induktionsgesetz Gl. (3–25) auf Seite 35, wenn l die Länge der sich im Magnetfeld befindlichen Leitersegmente und b die Breite der Leiterschleife ist. A ist die feldwirksame Fläche, also die Projektion der Leiterschleife in Feldlinienrichtung. ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung. Es entsteht also eine cosinusförmige Wechselspannung Gl. (3–43) mit einem zur Drehzahl N proportionalen Scheitelwert \hat{u} entsprechend Gl. (3–44).

Die so erzeugte Spannung kann über Schleifringe abgegriffen werden. Dies ist das Grundprinzip des (Wechselspannungs-)Generators oder *Dynamos*.

Auch diese Anordnung wirkt reziprok: Speisen wir über die Schleifringe einen Strom i in die Leiterschleife ein, bewirken die entstehenden Lorentzkräfte ein Drehmoment gemäß Gl. (3–45), das allerdings von der Winkelstellung α der Leiterschleife abhängig ist. Damit dieser „Motor“ sich stetig dreht, muß der Strom beim Durchlauf der Leiterschleifenebene durch die Symmetrieebene (bei $\alpha = 90^\circ$ und 270°) in seiner Polarität umgeschaltet werden. Bei Vorgabe eines Wechselstroms muß sich die Leiterschleife synchron zur Stromschwingung drehen. Dies ist daher das Grundprinzip des *Synchromotors*.

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

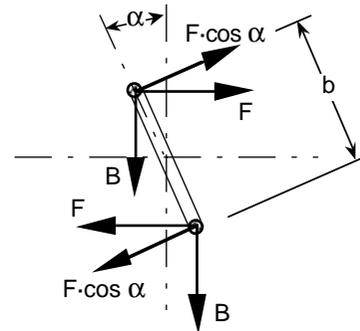
$$A = l \cdot b \cdot \sin\omega t$$

$$\frac{dA}{dt} = l \cdot b \cdot \omega \cdot \cos\omega t$$

$$u = -\omega \cdot B \cdot l \cdot b \cdot \cos\omega t = -\hat{u} \cdot \cos\omega t \quad (3-43)$$

$$\hat{u} = \omega \cdot B \cdot l \cdot b = 2\pi \cdot l \cdot b \cdot B \cdot N \quad (3-44)$$

$[N]$ = Ups (Umdrehungen pro Sekunde)



$$M_d = 2 \left(\frac{b}{2} \cdot F_l \right) \cos\alpha$$

$$F_l = i \cdot B \cdot l$$

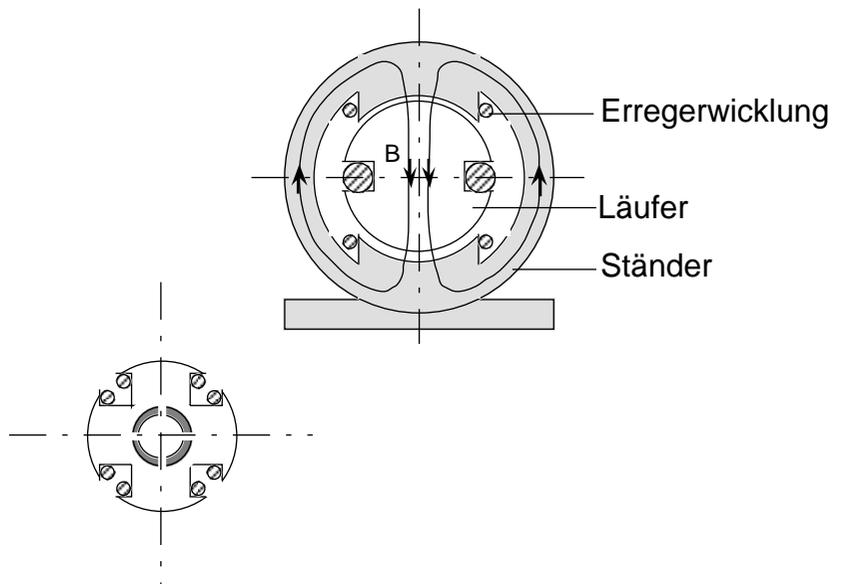
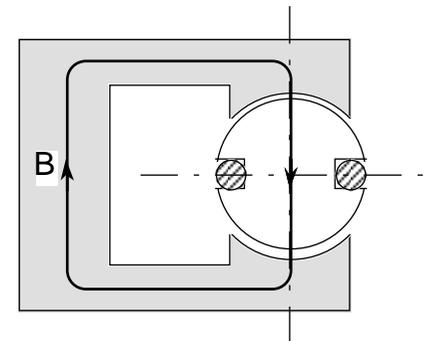
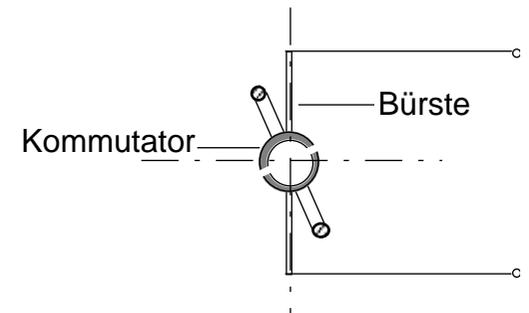
$$M_d = i \cdot B \cdot l \cdot b \cdot \cos\alpha \quad (3-45)$$

Auf dem Wege zu einer technisch brauchbaren Lösung werden zunächst die Schleifringe durch einen Kommutator (= Stromwender) ersetzt. Im Generatorbetrieb wird nun im Spannungs-Nulldurchgang der Cosinusschwingung automatisch eine Umpolung vorgenommen. Beim Motorbetrieb bewirkt diese rotationswinkelabhängige Umpolung gerade, daß die Lorentzkraft in ihrer Richtung umschlägt, wenn sich die Leiterschleife durch die Symmetrieebene dreht. Bei weiterhin in gleicher Richtung fließendem Strom ändert das Drehmoment nun seine Richtung nicht (wiewohl es in dieser Winkellage weiterhin Null wird, der Motor aus dieser Lage also nicht selbständig anlaufen würde). Der Motor kann nun mit Gleichstrom betrieben werden, und seine Drehzahl ist nicht mehr an die Synchronfrequenz gebunden.

Ungünstig an dieser Konstruktion ist allerdings der lange Weg der B-Feldlinien durch Luft, der einen hohen magnetischen Widerstand zur Folge hat. Der Luftweg wird drastisch verkürzt, wenn das von der rotierenden Leiterschleife umschriebene Volumen mit ferromagnetischem Material ausgefüllt wird. Dieser zylindrische Körper muß natürlich dann auf der Achse sitzen und mitrotieren. Er wird Rotor, Läufer oder Anker genannt.

Bei größeren Maschinen ist der Permanentmagnet durch eine elektrische Magnetfelderregung ersetzt. Dazu werden die magnetischen Polschuhe von einer Erregerstromspule umschlungen. Das Maschinengehäuse stellt nun den magnetischen Rückschluß dar.

Nun stört uns noch die starke Pulsation der am Kommutator abgegriffenen Spannung und insbesondere auch der „tote“ Winkel beim Motorbetrieb. Abhilfe wird hier geschaffen, indem der Rotor mit weiteren Leiterschleifen (oder Spulen) in versetzter Winkellage versehen wird. Die Wirkung wird am Beispiel einer zusätzlichen 90°-verdrehten Leiterschleife ersichtlich. Der Kommutator hat jetzt vier Segmente. Die Ankerwicklungen sind so mit den Kommutatorsegmenten verschaltet, daß – außer wenn die Bürsten gerade über den Trennfugen stehen – beide Wicklungspaare in sich ergänzender Weise in Serie liegen.



Zu elektrischen Maschinen, die besondere Bedeutung für Leistungsantriebe bekommen haben, sollen nach Behandlung der Wechselstromtechnik in Abschnitt 8 "Drehstrom" Einzelheiten beschrieben werden.

Übungsaufgaben zu den Themen

- magnetisches Feld ab Seite 143
- Schaltvorgänge mit Kapazitäten oder Induktivitäten ab Seite 161

4 Netzwerke

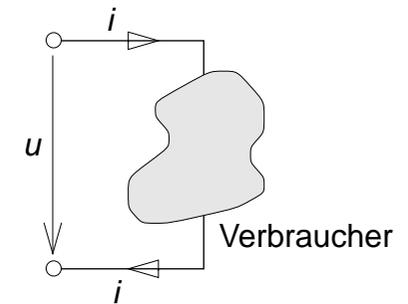
Nachdem nun die physikalischen Gesetzmäßigkeiten für die Erzeugung, den Transport, die Speicherung und den Verbrauch elektrischer Energie bekannt sind, wollen wir uns damit befassen, wie die elektrischen Bauelemente und ihre Zusammenschaltung zu Netzwerken abstrahiert werden, um die Wirkungsweise von Schaltungen für die Energieübertragung und Signalverarbeitung berechnen zu können.

4.1 Netzwerkelemente

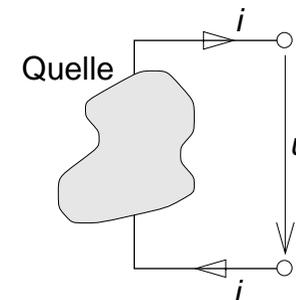
Die elementaren Elemente elektrischer Netzwerke haben zwei äußere Anschlüsse („Klemmen“). Wir nennen sie daher „Zweipole“. Ihr Innenleben ist vollständig beschrieben, wenn wir die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Klemmen (die „Klemmenspannung“) als Funktion des über die Klemmen fließenden Stroms angeben können. (Die Ströme über beide Klemmen sind übrigens entgegengesetzt gleich, da zwischen den Klemmen ein Strom weder abfließt noch zufließt!).

Um für die Flußrichtung eines Stroms bzw. für die Wirkungsrichtung einer Spannung einen Bezug festzulegen, wurden bereits in Abschnitt 1.5 auf Seite 12 der Strompfeil und der Spannungspfeil eingeführt.

Fließt Strom in Richtung des Spannungspfeils (oberes Bild; $u > 0$, $i > 0$, d.h. $p > 0$!), wird elektrische Energie abgebaut, siehe Gl. (1–13) auf Seite 10. Es handelt sich also um einen Verbraucher oder quellenlosen Zweipol. Fließt Strom entgegen dem Spannungspfeil, wird in dem Zweipol elektrische Energie aufgebaut ($p < 0$, unteres Bild): Der Zweipol ist also eine Quelle. Dies gilt ebenso für $u < 0$, $i < 0$. In den Fällen $u > 0$, $i < 0$ und $u < 0$, $i > 0$ kehrt sich die Situation um.



$$p = u \cdot i$$



Entsprechend gilt die Konvention, *positive* Leistung ist *verbrauchte* elektrische Leistung, *negative* Leistung ist *erzeugte* elektrische Leistung, wenn die Verbraucher-Pfeilrichtung zugrunde gelegt wird. Wenn die Quellenpfeilrichtung zugrunde gelegt wird, kehrt sich das Vorzeichen von p um.

Solange eine Zeitabhängigkeit nicht vorliegt (wie bei der Kapazität oder der Induktivität), läßt sich die Funktion des Stroms von der Spannung mit einem Strom/Spannungs-Diagramm (i/u -Diagramm) anschaulich machen. Dies wollen wir für die wichtigsten Zweipole tun.

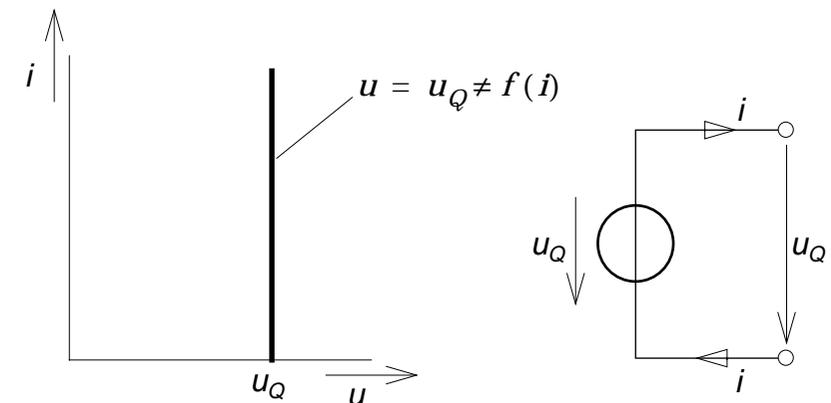
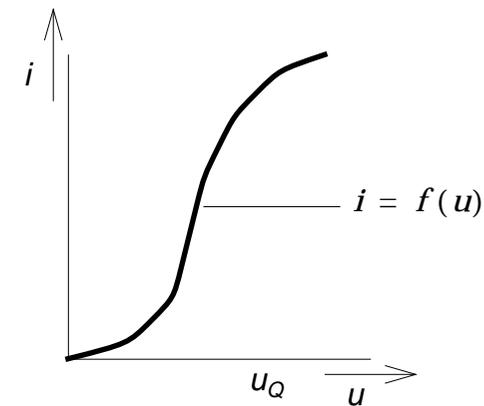
4.1.1 Spannungsquelle

Eine Spannungsquelle soll idealerweise Ladung in einen definierten Spannungszustand bringen, und es soll dabei keine Rolle spielen, wieviel von dieser 'gespannten' Ladung entnommen wird, kurz: die Klemmenspannung einer Spannungsquelle soll unabhängig vom abfließenden Strom sein. (Analogie: eine Pumpe, die ein Gas ohne Einfluß der abfließenden Gasmenge auf konstantem Druck hält.)

Das Symbol für eine (ideale) Spannungsquelle ist ein Kreis mit Strich in Richtung des Stromkreises, siehe Seite 13.

4.1.2 Stromquelle

Für die Modellierung realer Schaltungen (d.h. für ihre Beschreibung durch eine Zusammenschaltung aus idealisierten Zweipolen, siehe Abschnitt 4.3.4 auf Seite 57) ist es praktisch, auch eine Quelle mit einem zur Spannungsquelle „dualem“ Verhalten zur Verfügung zu haben: die Stromquelle. Ihre Analogie ist eine Pumpe, die eine Strömung des Mediums mit *konstanter Durchflußrate* erzwingt – unabhängig vom Strömungswiderstand, der der Strömung entgegengesetzt wird. Die elektrische Stromquelle 'pumpt' also



einen Ladungsträgerstrom mit einem konstanten Durchsatz an Ladung – unabhängig von der Spannung an ihren Klemmen, die entsteht, wenn dieser Strom durch einen Widerstand R fließt.

Natürlich liefert auch eine Spannungsquelle einen Strom und eine Stromquelle baut auch eine Spannung an ihren Klemmen auf. Sonst wäre ja keine Leistungsabgabe ($p = u \cdot i$) möglich. Die Begriffe *Spannungs-* bzw. *Stromquelle* kennzeichnen diejenige Größe, die jeweils konstant und unabhängig vom äußeren Stromkreis, also „eingepägt“ ist!

Das Symbol für eine Stromquelle ist ein Kreis mit Querstrich.

4.1.3 Ohmscher Widerstand

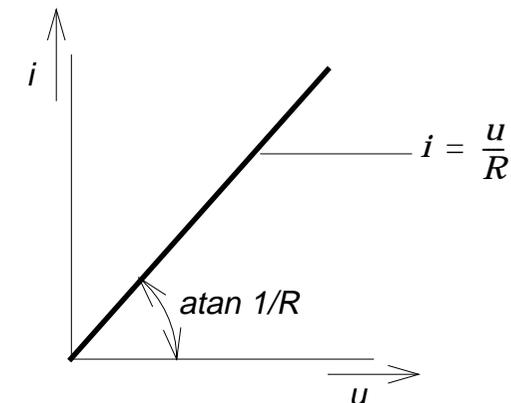
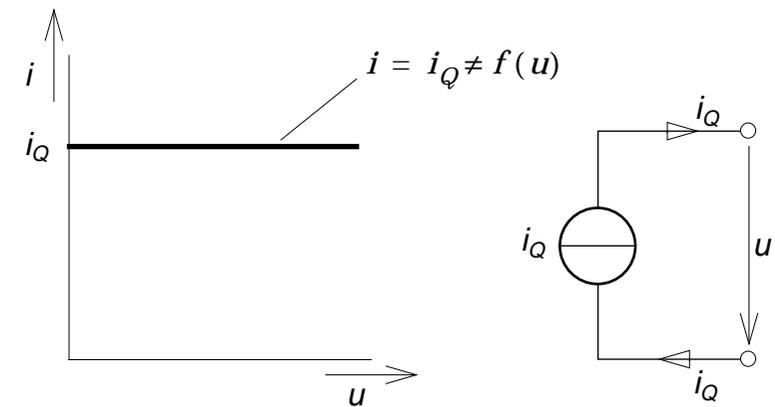
Für den ohmschen Widerstand gilt das Ohmsche Gesetz, Gl. (1–14) auf Seite 11.

Die i/u -Kennlinie ist also eine Gerade durch den *Nullpunkt* (wenn keine Spannung anliegt, fließt auch kein Strom), deren Steigung $1/R$ ist. Ohmsche Widerstände werden deshalb auch *lineare Widerstände* genannt. In elektrischen Schaltungen spielen auch *nichtlineare* Widerstände eine wichtige Rolle, insbesondere die (Gleichrichter)-Diode, siehe Abschnitt 5 auf Seite 67.

4.1.4 Kapazität und Induktivität

Kapazität (Bauelement Kondensator, siehe Abschnitt 2.3 auf Seite 18) und Induktivität (Bauelement Induktionsspule, siehe Abschnitt 3.6.1 auf Seite 35) können nicht durch eine i/u -Kennlinie beschrieben werden:

- Der Momentanwert der Spannung an einer Kapazität hängt von der *Vorgeschichte* des Stroms ab, der zu einer gespeicherten Ladung und damit zum Aufbau eines elektrischen Feldes geführt hat, siehe Gl. (2–14) auf Seite 20.



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i_C \cdot dt$$

- Der Momentanwert der Spannung an einer Induktivität wird bestimmt durch die *momentane* Veränderung des Stroms durch die Induktivität, die über eine Veränderung des B-Feldes eine Induktionswirkung hervorruft, siehe Gl. (3–28) auf Seite 37.

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Für das Zusammenspiel von Strom und Spannung spielt der Energieinhalt, verkörpert durch das E- bzw. B-Feld, und dessen zeitliche Änderung eine entscheidende Rolle:

- Ein Strom in eine (aus einer) Kapazität bewirkt eine Zunahme (Abnahme) der Ladung und damit des E-Feldes. Damit wiederum ist eine Änderung der Spannung verbunden, siehe Gl. (2–13) auf Seite 20.
- Der Momentanwert des Stromes durch eine Induktivität ist mit der Existenz eines B-Feldes gleichbedeutend, dessen Aufbau durch die bis zu diesem Zeitpunkt anliegende Spannung verursacht ist, siehe Gl. (3–29) auf Seite 37.

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

Kapazität und Induktivität verbrauchen keine Energie in dem Sinn, daß sie dem elektrischen System Leistung entnehmen, sondern sie *speichern* Energie, die sie in das elektrische System wieder zurückführen (siehe Lade- und Entladevorgang des Kondensators, Abschnitt 2.3.2 auf Seite 20, bzw. der Induktivität, Seite 37).

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u_L \cdot dt$$

Kapazität und Induktivität spielen in Netzwerken eine Rolle, sobald zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme auftreten. Dies ist der Fall, wenn in Gleichstromnetzwerken Schaltvorgänge stattfinden (dann gelten die zuvor erwähnten Gesetzmäßigkeiten für Lade- und Entladevorgänge) oder wenn Wechselspannungs- oder -stromquellen in Netzwerken enthalten sind, siehe Abschnitt 6 auf Seite 73. (Bei ausschließlich konstanten Spannungen und Strömen stellt die Kapazität eine Unterbrechung des Stromwegs, die Induktivität einen Kurzschluß dar.)

Im folgenden werden die Termini *Kapazität* für das Netzwerkelement Kondensator und *Induktivität* für das Netzwerkelement Spule benutzt.

4.2 Der unverzweigte Stromkreis

4.2.1 Spannungsquelle und Verbraucher

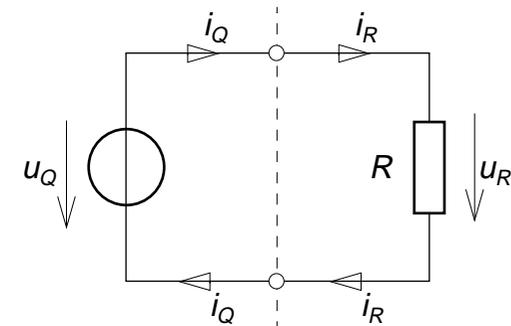
Für einen unverzweigten Stromkreis gilt, daß der Strom durch den Verbraucher i_R identisch ist mit dem Strom, den die Quelle liefert, i_Q . Denn in einem geschlossenen unverzweigten Leitungsweg („Stromkreis“) gehen weder Ladungsträger verloren, noch kommen welche hinzu.

Es gilt weiterhin der Energieerhaltungssatz: Die über die Quelle von außen in das System eingebrachte Energie w_Q ist gleich der von dem System nach außen hin abgelieferten Energie w_R . Mit Gl. (1-1) auf Seite 6 wurde die Spannung als Energie bezogen auf die Ladungseinheit definiert. Die Energiezunahme, die jede im Stromkreis zirkulierende Ladungseinheit beim Durchlaufen der Quelle erfährt, muß im Verbraucher vollständig abgebaut werden. Daraus folgt, daß die Spannung über den Klemmen des Verbrauchers notwendigerweise identisch sein muß mit der Spannung über den Klemmen der Quelle.

Andererseits ist nach dem Energieerhaltungssatz auch die abgeführte Leistung immer gleich der zugeführten Leistung. Da der Strom durch den Verbraucher identisch ist mit dem Strom durch die Quelle, folgt auch hieraus die Gleichheit von u_Q und u_R (siehe auch Seite 13).

Ist ein Widerstand wie skizziert mit einer Spannungsquelle verbunden, dann liefert die Quelle genau den Strom i_Q , bei dem sich das Spannungsgleichgewicht $u_R = u_Q$ einstellt.

Graphisch läßt sich dies veranschaulichen, indem in ein i/u -Diagramm sowohl die Kennlinie des Widerstandes (Gerade durch den Nullpunkt) und die Kennlinie der idealen Spannungsquelle (Senkrechte auf dem Spannungswert u_Q) eingezeichnet werden. Der Schnittpunkt beider Kennlinien stellt

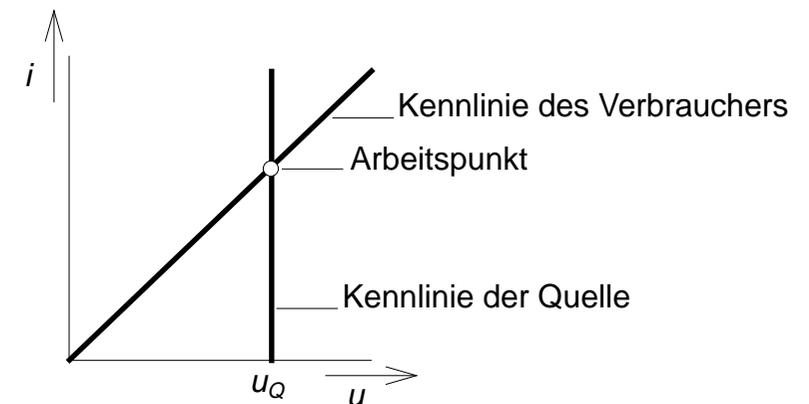


$$i_R = i_Q$$

$$w_R = w_Q$$

$$w = u \cdot q$$

$$u_R = u_Q$$



den *Arbeitspunkt* der Schaltung dar, d.h. das Strom/Spannungs-Verhältnis, das sich in dieser Situation als stabiles Gleichgewicht ergibt.

4.2.2 Stromquelle und Verbraucher

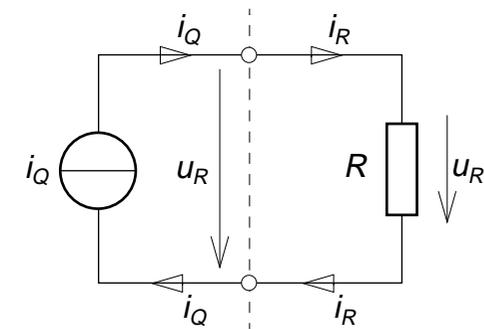
Ist die Quelle in einem unverzweigten Stromkreis eine *Stromquelle*, dann wird dem Widerstand ein Strom aufgezwungen. Dieser Strom baut am Widerstand eine Spannung auf, denn ohne eine Spannung kann durch den Widerstand kein Strom fließen. Spannung und Strom am Widerstand gehorchen wieder dem Ohmschen Gesetz, Gl. (1-14) auf Seite 11.

Wie vor kann dies sehr einfach im i/u -Diagramm veranschaulicht werden. Die Kennlinie der Stromquelle ist in diesem Fall eine horizontale Gerade auf dem Koordinatenwert i_Q . Wiederum markiert der Schnittpunkt beider Kennlinien den Arbeitspunkt dieser Schaltung.

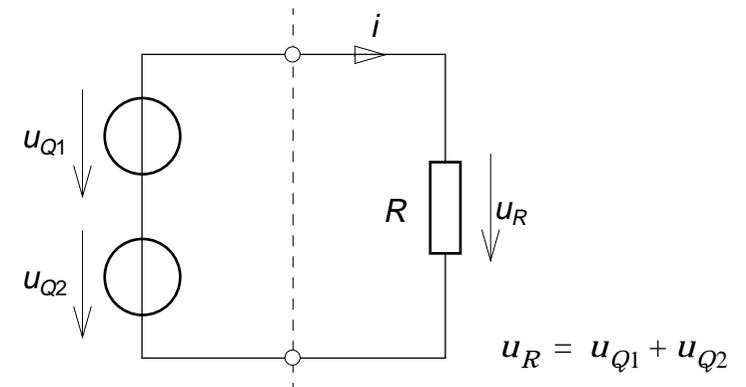
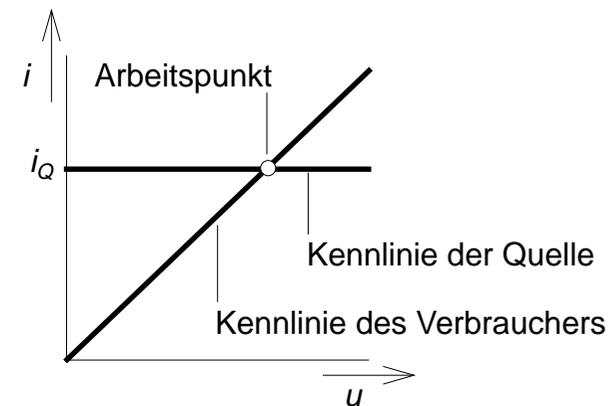
4.2.3 Serienschaltung von Spannungsquellen

Werden Spannungsquellen in Serie geschaltet, dann addiert sich der Energiezuwachs, den Ladungsträger beim durchlaufen dieses Stromkreises erfahren. Folglich erscheint an den Klemmen der kombinierten Quelle die Summe der Spannungen der einzelnen Quellen. Dies nutzt man z.B. bei der Zusammenschaltung von Batterien. So besteht eine 12V-Autobatterie aus sechs in Serie geschalteten Einzelzellen mit jeweils 2V Klemmenspannung.

Bei der Serienschaltung von Spannungsquellen sind natürlich die Vorzeichen und die Spannungspfeilrichtungen zu beachten: Bei gegensinnigen Spannungspfeilen subtrahieren sich die Spannungen der einzelnen Quellen voneinander. Dieser Fall ist z.B. relevant beim Laden einer Batterie: Die gleichnamigen Klemmen von Batterie und Ladespannungsquelle sind über



$$u_R = i_Q \cdot R$$

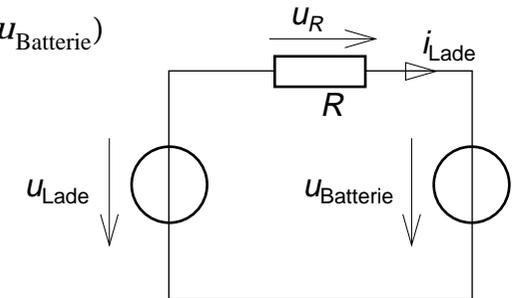


$$u_R = u_{Q1} + u_{Q2}$$

einen Ladewiderstand R miteinander verbunden. Der Ladestrom ist vom Spannungsunterschied abhängig.

Für die Berechnung umfangreicherer Netzwerken ist es praktisch, in Serie geschaltete Spannungsquellen zusammenzufassen und durch eine einzige Spannungsquelle mit der Summenspannung zu ersetzen. Die Spannungssumme muß vorzeichenrichtig gemäß der Richtungen der Spannungspfeile gebildet werden.

$$i_{\text{Lade}} = \frac{1}{R} \cdot (u_{\text{Lade}} - u_{\text{Batterie}})$$

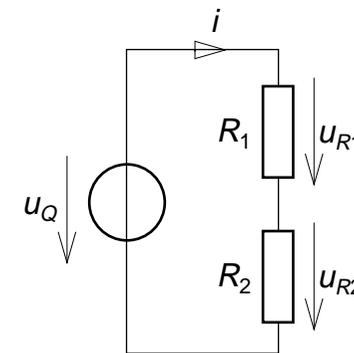


4.2.4 Widerstände in Serienschaltung

Werden zwei *in Serie* geschaltete Widerstände mit einer Spannungsquelle verbunden, dann wird die Energie von Ladungseinheiten, die in diesem Stromkreis zirkulieren, beim Durchfluß durch die Widerstände *nacheinander* abgebaut. Aus dem anteiligen Energieabbau in den beiden Verbraucherwiderständen folgt, daß die Summe der Klemmenspannungen beider Widerstände gleich der Quellenspannung ist.

Da auch in diesem Stromkreis der Strom unverzweigt ist, ist der Strom durch beide Widerstände gleich. Aus der Anwendung des Ohmschen Gesetzes ergibt sich eine Spannungsaufteilung im Verhältnis der beiden Teilwiderstände.

Diese Schaltung teilt also eine gegebene Quellenspannung auf. Wir bezeichnen sie daher als „Spannungsteiler“. Beziehen wir eine der Teilspannungen auf die Quellenspannung, dann erhalten wir die *Spannungsteilerregel* Gl. (4-1).



$$u_{R1} + u_{R2} = u_Q$$

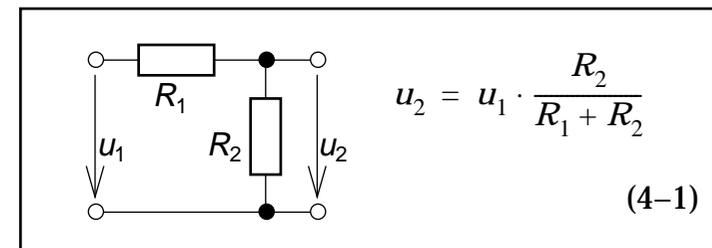
$$i_{R1} = i_{R2} = i_Q$$

$$\frac{u_{R1}}{R_1} = \frac{u_{R2}}{R_2}$$

$$\frac{u_{R1}}{u_{R2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$u_Q = (R_1 + R_2) \cdot i_Q$$

Spannungsteiler werden zur Herabsetzung einer gegebenen Spannung verwendet. Sie können fest eingestellt oder variabel („Schleifdraht-Potentiometer“) sein und z.B. in Audioschaltungen zur Lautstärkeeinstellung dienen. Die Spannungsteilerregel wird im folgenden häufig in Netzwerkberechnungen eingesetzt werden.



$$u_2 = u_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

(4-1)

Für die Berechnung umfangreicherer Netzwerke ist es praktisch, in Serie geschaltete Widerstände durch einen einzigen sogenannten Ersatzwiderstand zu ersetzen. Bei gegebener Quellenspannung stellt sich der gleiche Strom im Stromkreis dann ein, wenn der Ersatzwiderstand gleich der *Summe* aller in Serie geschalteter Widerstände ist, Gl. (4-2).

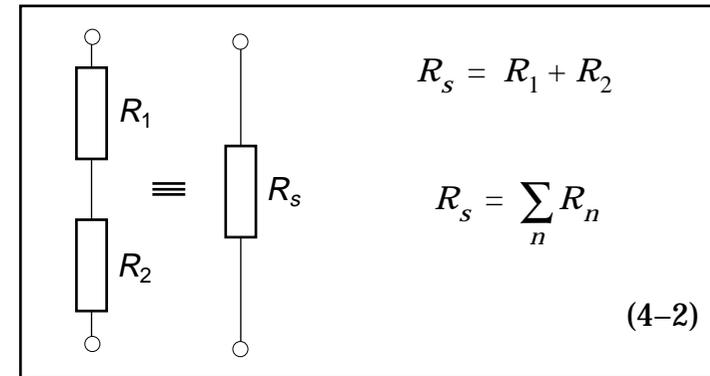
4.2.5 Die Maschengleichung

Verfolgen wir den Weg einer Teilladung über einen vollständigen Stromkreislauf, dann müssen sich – unabhängig von der Anzahl aller Quellen und Verbraucher in diesem Stromkreislauf und ihrer Reihenfolge – alle Energiezunahmen in den Quellen und alle Energieabnahmen in den Verbrauchern vollständig aufheben. Ausgedrückt mit dem Begriff der Spannung (= ladungsbezogene Energie) heißt dies, daß die Summe aller Quellenspannungen gleich der Summe aller Verbraucherspannungen sein muß. Dies führt zur allgemeinen Formulierung der *Maschengleichung* (4-3): *Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist Null!*

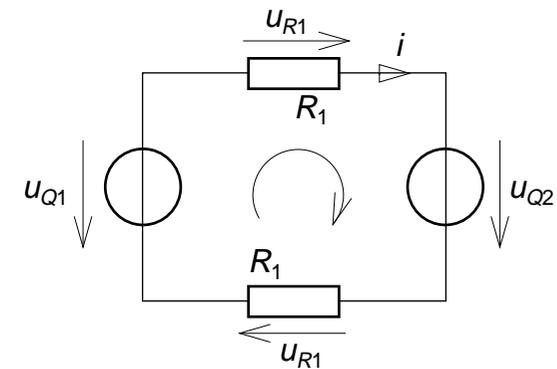
Als Masche bezeichnen wir im folgenden einen geschlossenen Stromweg, auch wenn sich auf dem Umlauf dieses Weges Verzweigungen zu weiteren Stromwegen ergeben.

Wenn wir die Maschengleichung für eine gegebene Masche aufstellen wollen, müssen wir uns zunächst auf eine Umlaufrichtung festlegen (die Umlaufrichtung kann beliebig gewählt werden). Die Richtung der Spannungspfeile sollte wie folgt festgelegt werden: an Verbrauchern in Richtung des Strompfeils, an Quellen gegen den Strompfeil. Unabhängig von der Einhaltung dieser Empfehlung führt die Aufstellung in jedem Fall zum richtigen Ergebnis, denn die weitere Rechnung liefert invertierte Vorzeichen für alle Größen, bei denen die Pfeilrichtung entgegen obiger Regel gewählt wurde.

Die Maschengleichung wird nun aufgestellt, indem wir einen vollständigen Maschenumlauf vornehmen und dabei alle Spannungen in Spannungspfeilrichtung positiv, gegen die Spannungspfeilrichtung negativ aufsummieren.



$$\sum u = 0 \quad (4-3)$$

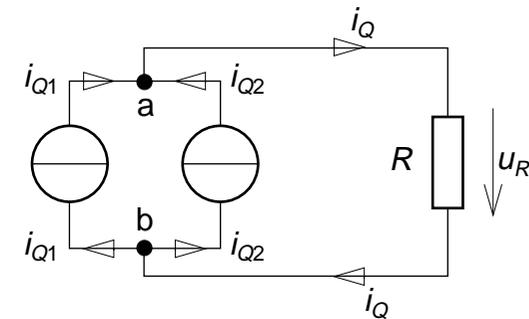


$$u_{Q2} + u_{R2} - u_{Q1} + u_{R1} = 0$$

4.3 Stromverzweigung

4.3.1 Parallelschaltung von Stromquellen

Bei dieser Anordnung fließen die Ladungsträger der beiden Stromquellen i_{Q1} und i_{Q2} am Knoten a zusammen und, nachdem sie den Verbraucherwiderstand R passiert haben, am Knoten b wieder auseinander. Die Summe der in einem Zeitintervall a nach b über den gemeinsamen Weg transportierten Ladung ist gleich der Summe der aus den Stromquellen zufließenden Teillaadungen. Also ist der Strom, der über den Verbraucherwiderstand fließt, gleich der Summe der Ströme beider Stromquellen, Gl. (4-4).

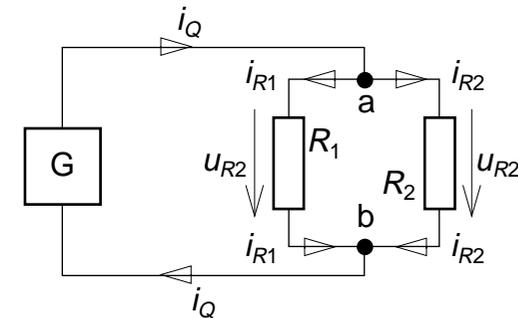


$$i_Q = i_{Q1} + i_{Q2} \quad (4-4)$$

Parallelgeschaltete Stromquellen können zusammengefaßt werden zu einer einzigen Ersatzstromquelle mit dem Summenstrom.

4.3.2 Widerstände in Parallelschaltung

Hier verzweigt sich der Gesamtstrom i am Knoten a in die Teilströme i_{R1} und i_{R2} . Nach dem Durchfluß durch die beiden Widerstände R_1 und R_2 fließen die beiden Ströme am Knoten b wieder zusammen. Auch hier gilt wieder, daß der Gesamtstrom i gleich der Summe der Teilströme ist, Gl. (4-5).



$$i = i_{R1} + i_{R2} \quad (4-5)$$

$$u_{R1} = u_{R2} = u \rightarrow i_{R1} \cdot R_1 = i_{R2} \cdot R_2$$

Da es für die Strom/Spannungs-Beziehung an den Widerständen unerheblich ist, ob die Speisung aus einer Spannungsquelle oder einer Stromquelle erfolgt, wird in der Stromkreisskizze das allgemeine Symbol für eine Quelle mit beliebigem i/u -Verhalten (quadratischer Kasten) verwendet.

Wie schon auf Seite 13 begründet wurde, herrscht an allen Zweipolen, die zwischen den Knoten a und b liegen, dieselbe Spannung. Damit sind auch die über den Widerständen R_1 und R_2 liegenden Spannungen u_{R1} und u_{R2} gleich. Daraus ergibt sich gemäß Gl. (4-6), daß das Verhältnis der Teilströme

$$\frac{i_{R2}}{i_{R1}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$i_{R2} = i \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (4-6)$$

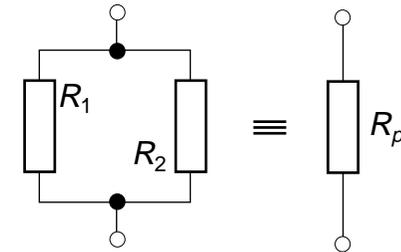
umgekehrt proportional zum Verhältnis der Widerstände ist. Die daraus abgeleitete Gl. (4-6) wird daher auch als *Stromteilerregel* bezeichnet.

Für die Berechnung umfangreicherer Netzwerke ist es wie bei seriengeschalteten Widerständen praktisch, auch *parallelgeschaltete* Widerstände zusammenzufassen und durch einen Ersatzwiderstand zu ersetzen.

Mit nebenstehender Rechnung kann der Gesamtstrom i ermittelt werden, der sich einstellt, wenn eine Spannung u an den parallelen Widerständen anliegt. Derselbe Strom stellt sich ein, wenn wir die Parallelschaltung der beiden Widerstände durch einen einzigen Widerstand ersetzen, dessen Kehrwert gleich der Summe der Kehrwerte der beiden ersetzten Widerstände ist, Gl. (4-7). Für den Ersatzwiderstand einer beliebigen Anzahl parallelgeschalteter Widerstände ergibt sich die allgemeine Formulierung Gl. (4-8).

$$i = \frac{u_{R1}}{R_1} + \frac{u_{R2}}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot u$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (4-7)$$



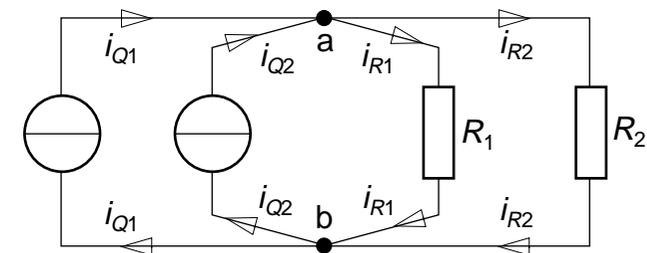
$$\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n} \quad (4-8)$$

$$\sum i = 0 \quad (4-9)$$

4.3.3 Die Knotengleichung

Aus den Beispielen für parallelgeschaltete Stromquellen und parallelgeschaltete Widerstände haben wir gesehen, daß an einem Knoten (d.h. an der Verbindung von mehr als zwei Leitern) die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller abfließenden Ströme ist. Dieser Satz gilt für Knoten mit beliebig vielen zufließenden und abfließenden Strömen. Führen wir ein, daß zufließende Ströme negativ gezählt werden und abfließende Ströme positiv gezählt werden, dann ergibt sich daraus die allgemeine Formulierung der *Knotengleichung* (4-9): *Die Summe aller Knotenströme ist Null!*

Wollen wir die Knotengleichung anwenden, dann müssen zunächst die Stromrichtungen auf allen Leitern durch Strompfeile festgelegt werden. Die Wahl der Richtung sollte wieder dem physikalischen Verständnis folgen. Andernfalls ergibt die weitere Rechnung lediglich invertierte Vorzeichen. Anschließend wird die Knotengleichung für den Knoten a wie im nebenstehenden Beispiel aufgestellt.



$$i_{R1} + i_{R2} - i_{Q1} - i_{Q2} = 0$$

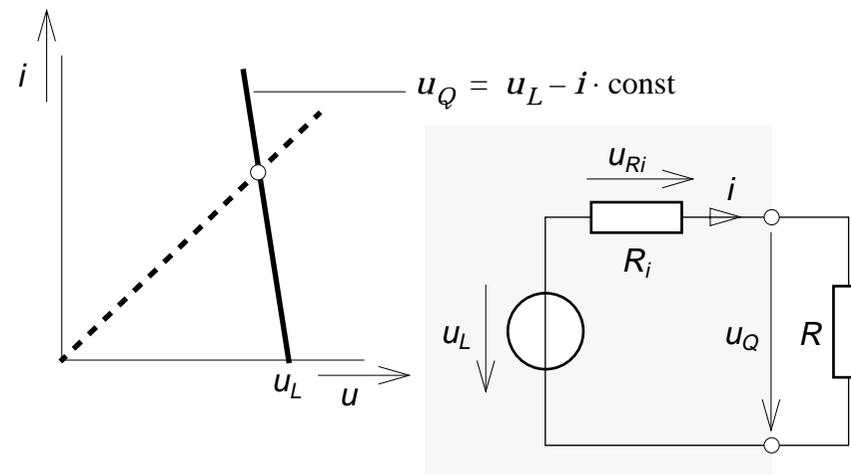
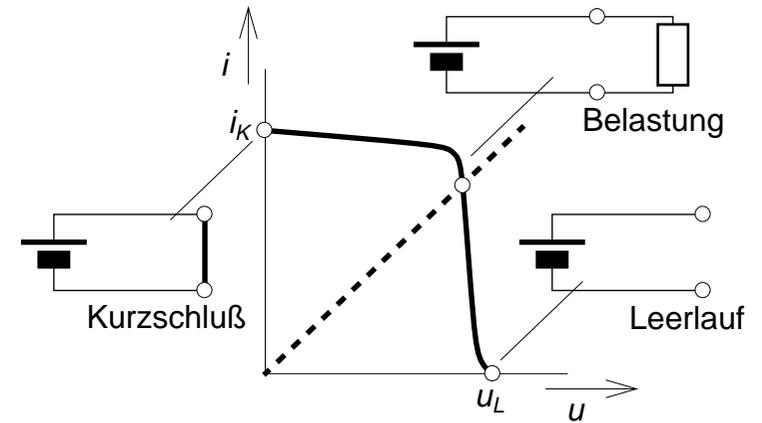
4.3.4 Quellen mit Innenwiderstand

Reale Zweipolquellen wie Batterien oder Generatoren verhalten sich nicht oder nur näherungsweise wie die auf Seite 48 beschriebene idealisierte Spannungsquelle.

Nebenstehendes Diagramm zeigt die i/u -Kennlinie einer Batterie. Wird ein bestimmter Maximalstrom überschritten, dann nimmt die Klemmenspannung rapide ab. Im Extremfall (Kurzschluß) erreicht die Klemmenspannung Null. Nur unterhalb dieses Maximalstroms verhält sich die Batterie näherungsweise wie eine idealisierte Spannungsquelle (Spannung *unabhängig* vom Strom). Aber selbst in diesem Bereich ist ein leichter Rückgang der Spannung bei zunehmendem Belastungsstrom zu beobachten. Einen solchen Effekt beobachten wir auch bei jeder anderen realen Spannungsquelle. Z.B. wird ein Fahrradscheinwerfer dunkler, wenn wir zusätzlich das Rücklicht an den Fahrraddynamo anschalten. Dieser Effekt ist durch einen Innenwiderstand der realen Spannungsquelle zu deuten. Ein Innenwiderstand kann ein tatsächlich vorhandener ohmscher Widerstand (die Kupferdrahtwicklung bei einem Dynamo) sein oder sich scheinbar aus dem Funktionsmechanismus der Spannungsquelle ergeben.

Um in Netzwerkberechnungen derartige Effekte in einfacher Weise berücksichtigen zu können, kann eine reale Spannungsquelle durch eine idealisierte Spannungsquelle mit zugeschaltetem Widerstand wie folgt modelliert werden, wenn die reale Spannungsquelle nur in dem Bereich ihrer linearen oder linearisierbaren Kennlinie betrieben wird: Einer idealisierten Spannungsquelle, deren Spannung gleich der Leerlaufspannung u_L der realen Spannungsquelle ist, wird ein Widerstand R_i *in Serie* geschaltet, der den Innenwiderstand verkörpert. Nach der Spannungsteilerregel Gl. (4-1) auf Seite 53 ergibt sich an dem äußeren Verbraucherwiderstand R eine gegenüber u_L reduzierte Klemmenspannung u_Q Gl. (4-10).

Ein anderer (gleichwertiger) Ansatz für die Bestimmung der Klemmenspannung ergibt sich aus der Aufstellung der Maschengleichung gemäß Gl. (4-11).



$$u_Q = u_L \cdot \frac{R}{R + R_i} \quad (4-10)$$

$$u_Q - u_L + i \cdot R_i = 0 \quad (4-11)$$

Im praktischen Fall ist es oft notwendig, zunächst die Modellparameter u_L und R_i einer gegebenen realen Spannungsquelle zu bestimmen. Dazu müssen wir die Arbeitspunkte bei mindestens zwei unterschiedlichen Belastungszuständen ermitteln. Der Leerlauf ($R = \infty$) ist eine erste ausgezeichnete Belastungssituation. Da im Leerlauf der Strom $i = 0$ ist, verursacht der Innenwiderstand keinen Spannungsabfall. Also ist die Klemmenspannung in dieser Situation gleich der Leerlaufspannung.

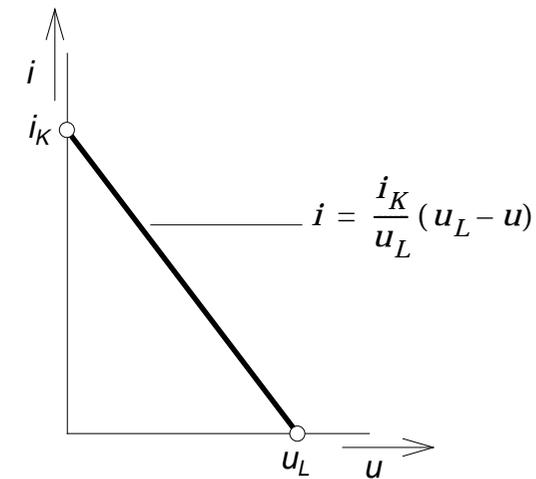
Ist die Kennlinie in ihrem gesamten Bereich linear, dann könnte eine zweite ausgezeichnete Belastungssituation der Kurzschluß ($R = 0$) sein. Den im Kurzschlußfall fließenden Strom nennen wir den *Kurzschlußstrom* i_K . Da die ideale Spannungsquelle jetzt nur noch durch den Innenwiderstand belastet wird, ergibt sich der Kurzschlußstrom nach Gl. (4-12). Aus Gl. (4-12) können wir den Innenwiderstand bestimmen.

Achtung: eine Kurzschlußstrommessung darf nur an Spannungsquellen vorgenommen werden, die den Kurzschlußfall unbeschadet überstehen können!

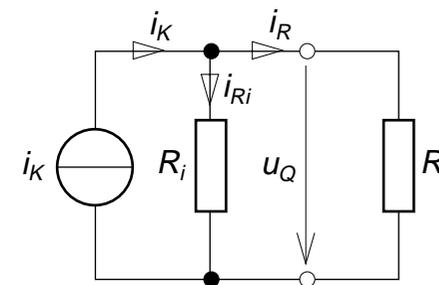
Um bei einer meßtechnischen Bestimmung der Modellparameter den Kurzschlußfall zu vermeiden, können wir statt des Kurzschlusses einen zweiten definierten Belastungsfall herstellen. Ist der Belastungswiderstand R bekannt, ergibt sich der Innenwiderstand unter Verwendung von Gl. (4-10). Ist der Belastungswiderstand R unbekannt, dann muß der Belastungsstrom gemessen werden und der Innenwiderstand kann unter Verwendung von Gl. (4-11) berechnet werden.

4.3.5 Modellierung einer realen Quelle mittels einer Stromquelle

Die Kennlinie einer realen Spannungsquelle – also einer idealisierten Spannungsquelle mit in Serie geschaltetem Innenwiderstand – kann auch als Kennlinie einer Stromquelle gedeutet werden, deren Strom mit wachsendem Belastungswiderstand kleiner wird. Dies ist der Fall, wenn der eingepreßte Strom der auf Seite 48 beschriebenen idealisierten Stromquelle einen



$$i_K = \frac{u_L}{R_i} \quad (4-12)$$



Nebenweg (auch Nebenschluß oder „shunt“ genannt) erhält. Ein solcher Nebenweg kann ein Widerstand R_i parallel zur Stromquelle sein.

Nur im Kurzschlußfall, d.h. äußerer Belastungswiderstand $R = 0$, fließt der gesamte Quellenstrom über den äußeren Stromweg. Dies geht aus Anwendung der Stromteilerregel Gl. (4-6) auf Seite 55 hervor.

Im Leerlauf fall fließt der Strom der Stromquelle allein über den Innenwiderstand R_i . An ihm fällt nun die Leerlaufspannung u_L ab, wenn der Parallelwiderstand dieser Quelle gleich dem Serienwiderstand des oben beschriebenen Spannungsquellenmodells ist und der Strom dieser Stromquelle dem Kurzschlußstrom nach Gl. (4-12) auf Seite 58 entspricht.

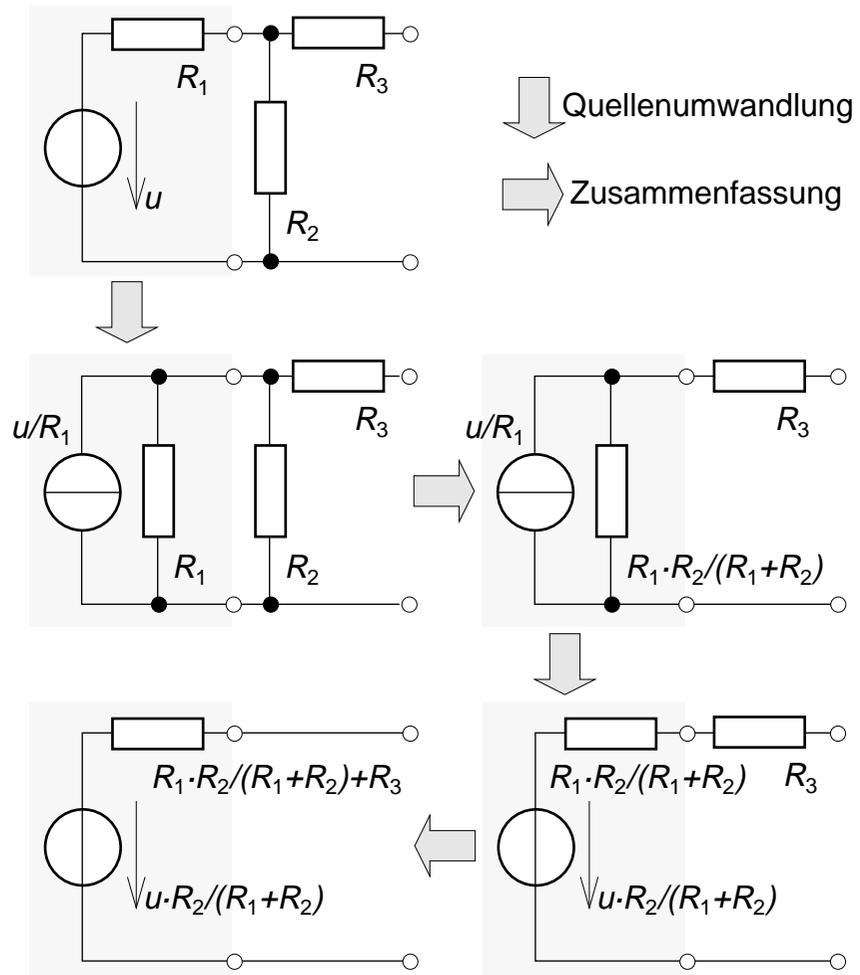
Wie bei der Spannungsquelle mit Innenwiderstand die Maschengleichung Gl. (4-11) auf Seite 57, gibt in diesem Fall die Knotengleichung Gl. (4-13) einen alternativen Lösungsansatz, der zum selben Ergebnis führt.

Spannungsquellenmodell und Stromquellenmodell können gegeneinander ausgetauscht werden, je nachdem, welches Quellenmodell für die Behandlung der gegebenen Netzwerkstruktur am vorteilhaftesten zu berechnen ist. Dies soll im folgenden Abschnitt erläutert werden.

4.3.6 Quellenumwandlung

Mit dem Prinzip der dualen Quellen können Schaltungen vereinfacht werden, indem auf die Anwendung der Regeln für parallele oder in Serie geschaltete Widerstände hingearbeitet wird. Am folgenden Beispiel soll die Vorgehensweise dargestellt werden. Darin sei eine Spannungsquelle mit einer T-Schaltung aus drei Widerständen beschaltet. Diese Schaltung kann bezüglich ihres i/u -Verhaltens an ihren Klemmen durch eine äquivalente Spannungsquelle mit Innenwiderstand beschrieben werden. Die Umwandlung wird in der nebenstehenden Skizze in vier Teilschritte zerlegt dargestellt.

$$-i_K + \frac{u_Q}{R} + \frac{u_Q}{R_i} = 0 \quad (4-13)$$



In der äquivalenten Schaltung (unten links) wird, wie auch ohne die Umwandlung ersichtlich war, die ursprüngliche Spannung u durch den Spannungsteiler $R_1 R_2$ reduziert wirksam. Der Weg über die Quellenumformung ergibt aber darüberhinaus auch den Innenwiderstand der äquivalenten Schaltung, der benötigt wird, wenn es sich bei dem dargestellten Netzwerk nur um einen Ausschnitt aus einem umfangreicheren Netzwerk handelt.

Die Quellenumwandlung ist ein äußerst hilfreiches Verfahren, um umfangreichere Netzwerke schrittweise zu vereinfachen und ihre Berechnung übersichtlich zu gestalten. Sie ergänzen die im späteren Text behandelten Verfahren zur Umstrukturierung eines gegebenen Netzwerks, siehe Seite 64.

4.4 Netzwerke mit Maschen und Knoten

Im Folgenden sollen nun beliebig verzweigte Netzwerke mit den bisher erarbeiteten Grundregeln analysiert werden. Der allgemeinste Ansatz ergibt sich aus einer konsequenten Aufstellung eines vollständigen Systems von Maschengleichungen und Knotengleichungen, das anschließend nach den zu berechnenden unbekanntem Strom- und Spannungsgrößen aufgelöst wird.

4.4.1 Definitionen

- *Zweig*: Netzwerkelement(e) zwischen zwei Knoten.
Jeder Zweig ist beschreibbar durch ein i, u -Wertepaar.
- *Knoten*: Verknüpfung von mindestens drei Strompfaden (Zweigen).
Für jeden Knoten gilt die Knotengleichung Gl. (4–9) auf Seite 56.
- *Masche*: Geschlossener Weg über mindestens zwei Zweige.
Für jede Masche gilt die Maschengleichung Gl. (4–3) auf Seite 54.

$$\sum i = 0$$

$$\sum u = 0$$

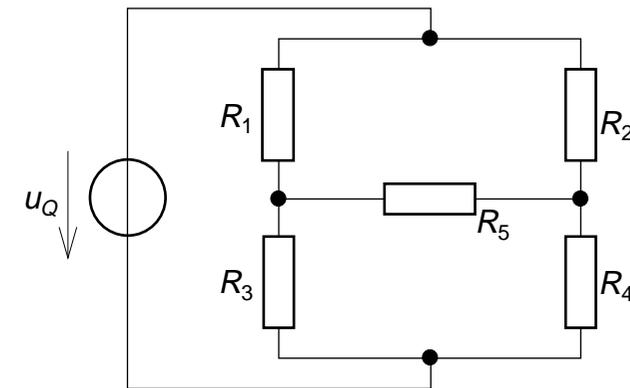
4.4.2 Anwendung der Maschen- und Knotengleichungen

Für ein gegebenes Netzwerk kann das i,u -Wertepaar für alle Zweige aus einem vollständigen System aller *unabhängigen* Maschengleichungen und Knotengleichungen bestimmt werden.

- *Unabhängige Knotengleichungen:*
Für ein Netzwerk mit k Knoten können **$k-1$** unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die k te Knotengleichung ist eine Linearkombination der unabhängigen Knotengleichungen.
- *Unabhängige Maschengleichungen:*
Für ein Netzwerk mit z Zweigen können **$z-k+1$** unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden. Alle übrigen möglichen Maschengleichungen können als Linearkombinationen aus den unabhängigen Maschengleichungen hergeleitet werden.
- *Zweiggleichungen:*
Für jeden *passiven* Zweig kann eine Zweiggleichung aufgestellt werden. Die Zweiggleichung eines passiven Zweiges ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben, das die Proportionalität zwischen Strom und Spannung ausdrückt.

In einem vollständigen System aus Maschengleichungen, Knotengleichungen und Zweiggleichungen treten die Quellenspannungen und Quellenströme als *unabhängige Variable*, die Ströme und Spannungen aller passiven Zweige als *abhängige Variable* auf. In einem vollständigen Gleichungssystem muß die Zahl aller *unabhängigen* Gleichungen gleich der Zahl der *abhängigen* Variablen sein.

Das Aufstellen eines vollständigen Gleichungssystem soll am Beispiel der *Brückenschaltung* dargestellt werden. Die Brückenschaltung besteht aus den vier Brückenwiderständen R_1 bis R_4 und dem Diagonalwiderstand R_5 . Sie wird durch die Spannungsquelle u_Q gespeist.

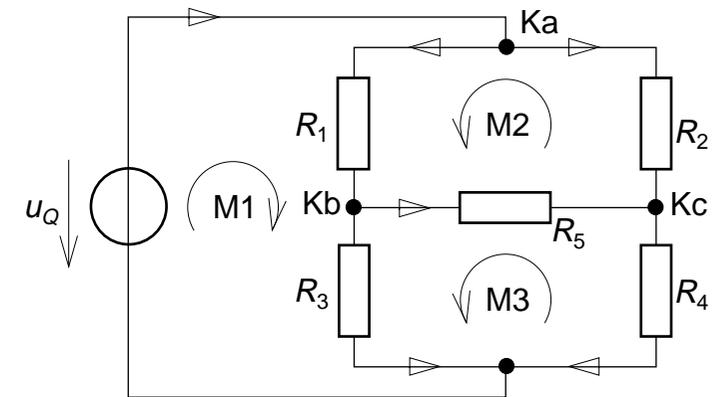


Das Brückennetzwerk hat eine unabhängige Variable (Quellenspannung u_Q) und 11 abhängige Variablen (jeweils 5 Ströme und Spannungen an den 5 Widerständen sowie der Quellenstrom). Es besteht aus 6 Zweigen, die über 4 Knoten miteinander verbunden sind. Das Problem, eine oder mehrere der abhängigen Unbekannten zu bestimmen, ist lösbar mit einem Gleichungssystem aus drei unabhängigen Knotengleichungen (Ka, Kb, Kc), drei unabhängigen Maschengleichungen (M1, M2, M3) und fünf Zweigggleichungen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in obiger Skizze die Spannungspfeile an den Widerständen weggelassen worden. Für die Aufstellung der Maschengleichungen wurde Richtungsgleichheit mit den Strompfeilen festgelegt.

Das Gleichungssystem kann bereits erheblich vereinfacht werden, indem entweder in den Knotengleichungen die Ströme aller passiven Zweige unter Anwendung der jeweiligen Zweigggleichungen durch die Zweigspannungen oder in allen Maschengleichungen die Spannungen aller passiven Zweige durch die Zweigströme ersetzt werden, siehe nebenstehendes Beispiel für Masche 1. Dann ergibt sich ein System aus 6 Gleichungen mit 6 abhängigen Variablen.

Das Ziel der Berechnung dieses Netzwerks könnte sein, u_5 und i_5 als Funktion der Speisespannung u_Q und der Widerstände R_1 bis R_5 zu berechnen. Dann wäre das Gleichungssystem entsprechend aufzulösen.

Die Brückenschaltung gehört zu den wichtigsten Meßschaltungen. Durch Anwendung der Spannungsteilerregel für die Spannungsteiler R_1R_3 und R_2R_4 wird ersichtlich, daß die Spannungen über R_3 und R_4 im *Symmetriefall* $R_1/R_3 = R_2/R_4$ gleich werden, daß also zwischen den Knoten b und c kein Spannungsunterschied mehr herrscht. Also kann im Symmetriefall kein Strom über den Widerstand R_5 fließen. Wird statt R_5 ein Spannungsmeßgerät eingeschaltet, dann zeigt dieses Null, wenn Symmetrie besteht. Dies kann zu einer sehr präzisen Widerstandsmessung genutzt werden: R_3 sei der unbekannte Widerstand. Wird anstelle von R_4 ein kalibriert verstellbarer Widerstand eingesetzt und wird dieser Widerstand so lange verstellt, bis der Brückenabgleich (Meßgerätestrom gleich Null) erreicht ist, dann kann der Wert des unbe-



$$\text{Knoten a: } 0 = i_1 + i_2 - i_Q$$

$$\text{Knoten b: } 0 = i_5 + i_3 - i_1$$

$$\text{Knoten c: } 0 = i_4 - i_2 - i_5$$

$$\text{Masche 1: } 0 = u_1 + u_3 - u_Q$$

$$\text{Masche 2: } 0 = u_1 + u_5 - u_2$$

$$\text{Masche 3: } 0 = u_3 - u_4 - u_5$$

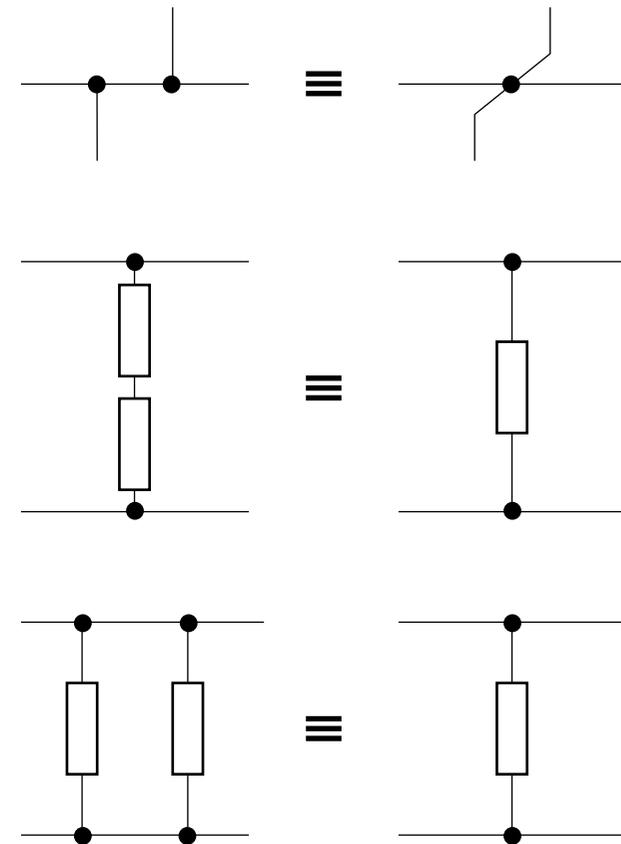
$$\text{Masche 1: } 0 = R_1 \cdot i_1 + R_3 \cdot i_3 - u_Q$$

kannten Widerstands R_3 aus den bekannten Widerstandswerten von R_1 , R_2 und R_4 berechnet werden.

Andererseits kann diese Schaltung auch zur Messung sehr kleiner relativer Widerstandsänderungen verwendet werden. Befindet sich die Brücke im Abgleich und wird nun einer der Brückenwiderstände geringfügig verändert, dann ist eine zwischen den Knoten b und c gemessene Spannung ein Maß für die relative Widerstandsänderung in Größe und Vorzeichen. Brückenschaltungen werden technisch zum Beispiel dazu eingesetzt, die Temperaturabhängigkeit eines elektrisch leitenden Materials (siehe Seite 12) zur Temperaturmessung zu nutzen. Auch für *Dehnungsmeßstreifen* (das sind dünn gewalzte Folienwiderstände, die auf mechanische Bauteile aufgeklebt werden und bei deren mechanischer Dehnung oder Stauchung eine entsprechende Widerstandsänderung nach Gl. (1–16) auf Seite 11 erfahren) bieten sich Brückenschaltungen für die Auswertungen der sehr kleinen relativen Widerstandsänderungen an.

4.4.3 Rezepte für die Vereinfachung von Netzwerken durch Ersatzelemente

1. Knoten, zwischen denen sich 'leere' Zweige ergeben (d.h., zwischen denen weder aktive noch passive Zweipole liegen) können zu einem Knoten zusammengefaßt werden.
2. Zweige, die aus in Serie geschalteten Widerständen bestehen, werden zu Zweigen mit dem jeweiligen Ersatzwiderstand nach Gl. (4–2) auf Seite 54 ersetzt. (Achtung: Zwischen den ersetzten Widerständen darf keine Verzweigung stattfinden!)
3. Wenn zwei Knoten durch mehr als einen passiven Zweig verbunden sind, können diese Zweige durch Anwendung der Regel für parallele Widerstände nach Gl. (4–8) bzw. Gl. (4–7) auf Seite 56 zu einem Zweig zusammengefaßt werden.
4. Wenn Teilspannungen oder Teilströme an den zusammengefaßten Elementen gefragt sind, muß am Ende auf diese Teilgrößen zurückgerechnet werden.



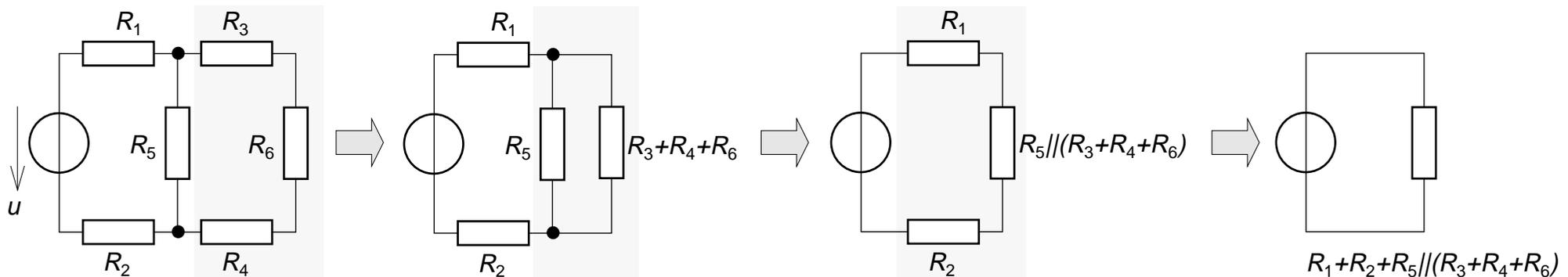
4.5 Alternativen für die Netzwerkberechnung

Die Aufstellung eines vollständigen Systems von Maschen-, Knoten- und Zweiggleichungen führt zu einer vollständigen Lösung für das Netzwerk, d.h. aus diesem Gleichungssystem können *alle* abhängigen Variablen bestimmt werden. Oftmals ist jedoch nur die Berechnung der Größen für einen einzigen Zweig interessant. Ist dies der Fall, dann können verschiedene Maßnahmen zur Vereinfachung der Rechnung angewandt werden.

4.5.1 Sukzessiver Abbau von Zweigen

Gegeben sei eine Quelle, an die eine Kette von Verbrauchern jeweils über widerstandsbehaftete Leitungsbrücken angeschaltet ist.

Die Spannung über R_6 kann unter Anwendung der Spannungsteilerregel aus der Spannung über R_5 abgeleitet werden. Um diese wiederum unter Anwendung der Spannungsteilerregel aus der Quellenspannung u herleiten zu können, ersetzen wir die Widerstände R_3 , R_6 und R_4 durch den Serieneratzwiderstand nach Gl. (4-2) auf Seite 54 und ermitteln schließlich den Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung aus R_5 und $(R_3 + R_4 + R_6)$ durch Anwendung von Gl. (4-7) auf Seite 56. Die jeweils zusammenzufassenden Widerstände sind grau unterlegt.

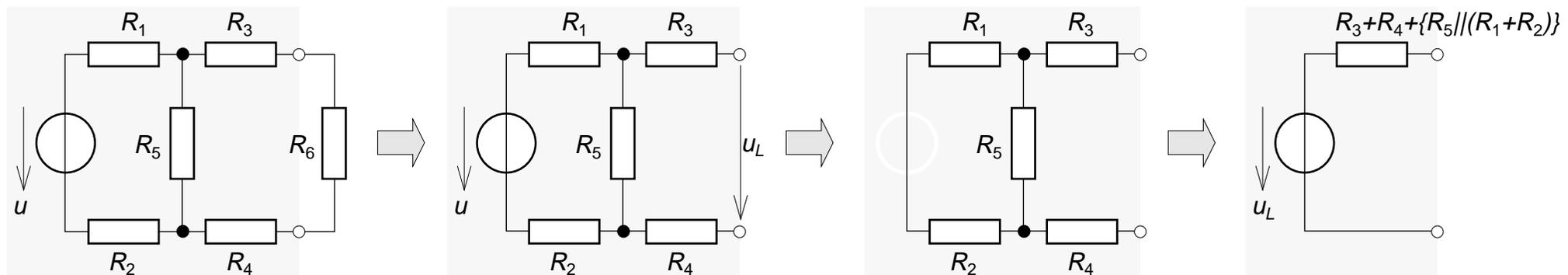


Durch eine weitere Anwendung der Serienschaltungsregel auf die verbleibenden drei Widerstände erhalten wir den Gesamtbelastungswiderstand der Quelle und können nun den Strom ausrechnen, den die Quelle in das Netzwerk speist. Die einzelnen Spannungen und Ströme werden, von rechts nach links gehend, mittels Spannungsteiler- bzw. Stromteilerregel berechnet.

4.5.2 Ersatzquellen-Verfahren

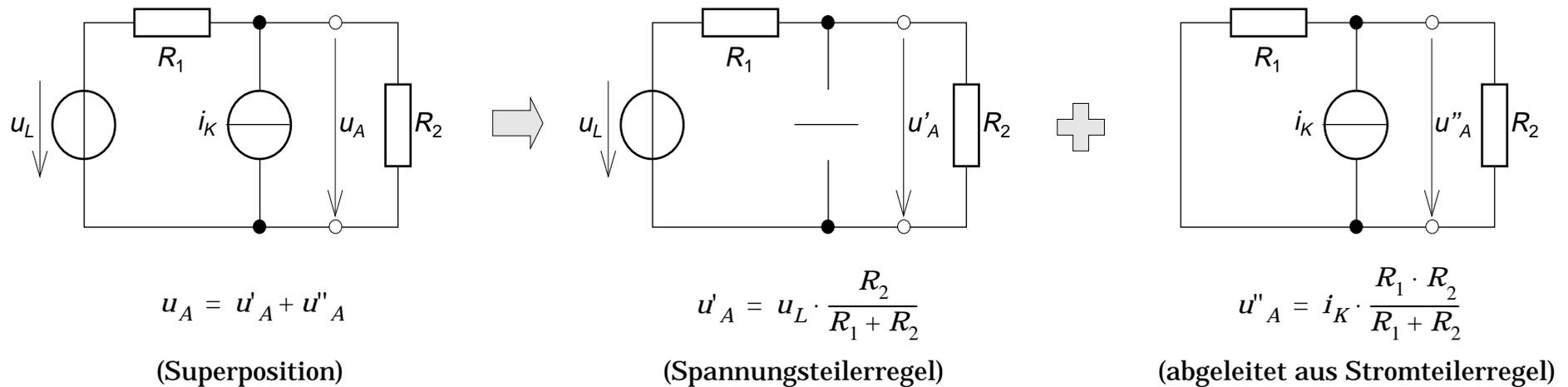
Interessiert uns bei einem Netzwerk lediglich der Strom und die Spannung an einem einzigen Netzwerkelement, können wir das gesamte übrige Netzwerk als eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand auffassen, die diesen (passiven) Zweipol versorgt. Aufgabe ist es nun, die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand dieser Ersatzspannungsquelle zu bestimmen. Bei einem Netzwerk mit nur *einer* Quelle gehen wir nach folgendem Rezept vor:

1. Man trenne den interessierenden Zweig heraus (im Beispiel unten R_6).
2. Man bestimme die Spannung u_L zwischen den Knoten des herausgetrennten Zweigs (Spannungsteilerregel etc.).
3. Man ersetze die Spannungsquelle durch einen Kurzschluß ($u = 0$) oder trenne die Stromquelle heraus ($i = 0$). (Kreis um die Quelle entfernen!)
4. Man bestimme den Gesamtwiderstand zwischen den Knoten des herausgetrennten Zweigs (Serienschaltungs- und Parallelschaltungsregel).



4.5.3 Netzwerke mit mehreren Quellen: Superpositions-Verfahren

Bei einem Netzwerk, das ausschließlich aus linearen Netzwerkelementen besteht, gilt der *Superpositionssatz*. Die gemeinsame Wirkung aller Quellen auf ein beliebiges passives Netzwerkelement ist gleich der Summe der Wirkungen aller einzelnen Quellen. Die Wirkung jeder einzelnen Quelle wird berechnet, indem alle weiteren Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt ($u_Q = 0$) und alle weiteren Stromquellen herausgetrennt ($i_Q = 0$) werden (Merkregel: Jeweils Kreise um die Quellsymbole entfernen!).



4.5.4 Quellenumwandlung

Die Anwendung der auf Seite 59 beschriebenen Methode der Quellenumwandlung ist eine weitere Möglichkeit zur Vereinfachung von Teilnetzen. Ein Beispiel findet sich in Abschnitt 6.7 auf Seite 98.

Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt ab Seite 149

5 Halbleiterbauelemente

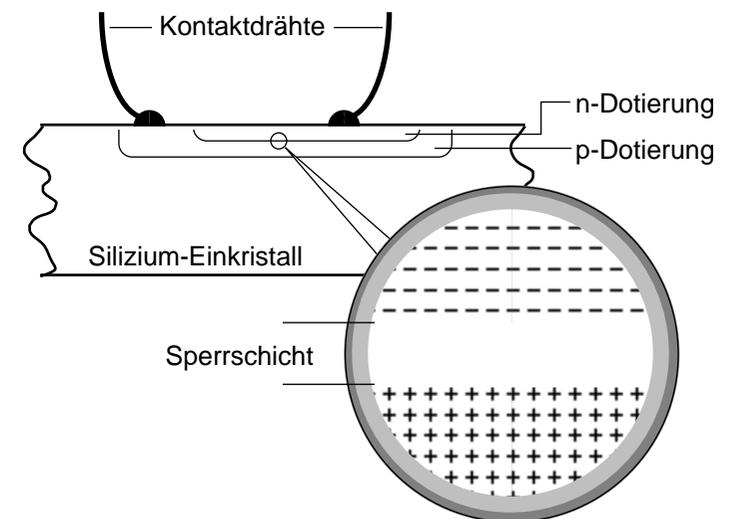
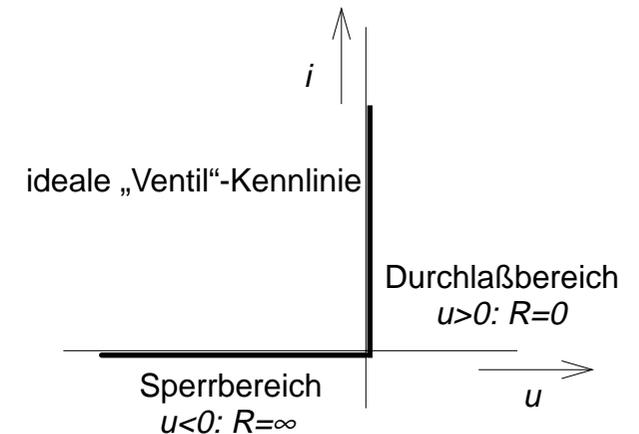
Für die elektrische Signalverarbeitung sowie für die Steuerung von Leistungsflüssen in energietechnischen Anlagen werden – über die bisher beschriebenen linearen Netzwerkelemente hinaus – *nichtlineare* Elemente und *steuerbare* Elemente benötigt. Der Prototyp des nichtlinearen Netzwerkelements ist die „Diode“, der Prototyp des steuerbaren Elements der „Transistor“. Für beide Klassen hat die *Halbleitertechnologie* die Grundlage für die technische Realisierung geschaffen.

5.1 Halbleiterdiode

Eine Diode ist eine Art „Rückschlagsventil“, das Strom nur in eine Richtung durchläßt („Durchlaßrichtung“), in der Gegenrichtung („Sperrichtung“) dagegen sperrt. Das Modell eines derartigen Zweipols besitzt eine i/u -Kennlinie, die sich aus den Kennlinien eines sehr kleinen Widerstands in der Durchlaßrichtung (steile Kennlinie) und eines sehr hohen Widerstands in der Sperrichtung (flache Kennlinie) zusammensetzt. Die vollständige Kennlinie weist also eine ausgeprägte *Nichtlinearität* auf.

5.1.1 Das physikalische Prinzip der Halbleiterdiode

Eine solche Ventilwirkung kann mit Halbleiterstrukturen erreicht werden. Halbleiter (der gebräuchlichste ist das Element Silizium) werden erst elektrisch leitfähig, wenn in das Kristallgitter eines einkristallinen Körpers Fremdstoffatome eingebaut werden, die ein Elektron mehr oder ein Elektron weniger in ihrer Außenschale besitzen als das Halbleitergrundmaterial. Diese „Dotierungs“-Atome nehmen den Platz eines Halbleiteratoms im Kristallgitter ein. Jedoch hinterlassen sie ein für die Bindung der

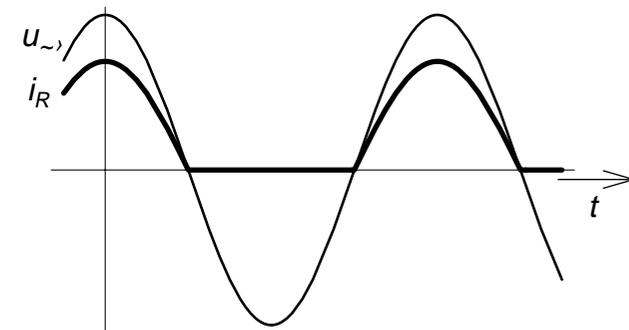
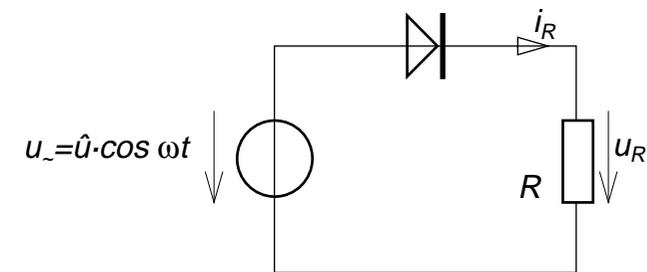
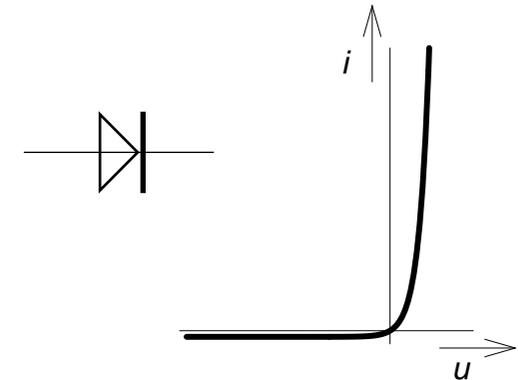


Atome im Kristall nicht benötigtes Elektron (n-Dotierung), das sich nun frei bewegen kann. Oder das für die Bindung fehlende Elektron (p-Dotierung) erzeugt ein "Loch", das ebenfalls frei beweglich ist. Die Beweglichkeit von negativen Ladungsträgern (Elektronen) bei n-Dotierung bzw. die Beweglichkeit von positiven Ladungsträgern (Löcher) machen den dotierten Halbleiter elektrisch leitfähig. Er wird um so leitfähiger, je höher die Störstellenkonzentration (Anzahl der Dotierungsatome) ist.

Der für die Ventilwirkung interessante Effekt entsteht an der Grenzfläche zwischen Halbleiterbereichen mit gegensinniger Dotierung. Dort füllen die überschüssigen Elektronen zunächst benachbarte Löcher auf, so daß eine nichtleitende Zone, die „Sperrschicht“ entsteht, die eine weitere Neutralisierung unterbindet.

Ein Stromfluß, der so gerichtet ist, daß er der p-Seite weitere Elektronen zuführt, die dort Löcher auffüllen und von der n-Seite freie Elektronen abzieht, würde die Ausdehnung der Sperrschicht vergrößern, also die Isolatorwirkung begünstigen. Ein entgegengesetzter Stromfluß würde die Ladungsträgerkonzentration in beiden Bereichen erhöhen und so die Chance zur Überwindung der Sperrschicht vergrößern.

Die Kennlinie einer üblichen Halbleiterdiode hat gegenüber dem gewünschten, im Ursprung abgeknickten Verlauf einen kontinuierlichen Übergang zwischen Durchlaß- und Sperrbereich. Reale Dioden sperren zudem nur bis zu einer bestimmten negativen Maximalspannung, der sogenannten Durchbruchsspannung.



5.1.2 Anwendung der Diode als Gleichrichter

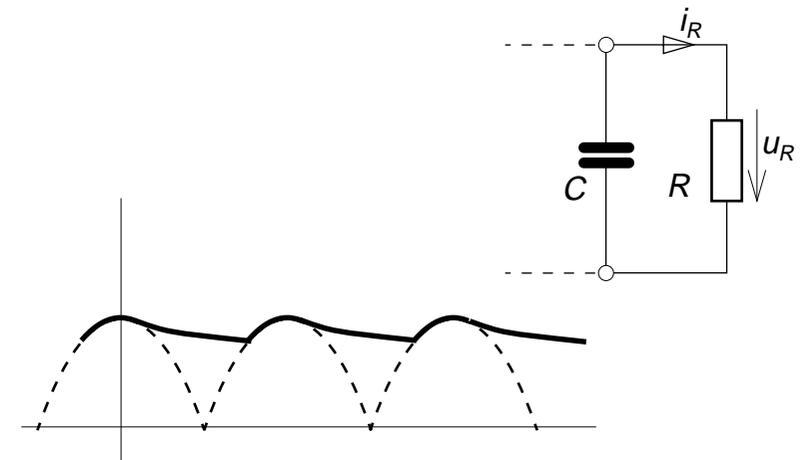
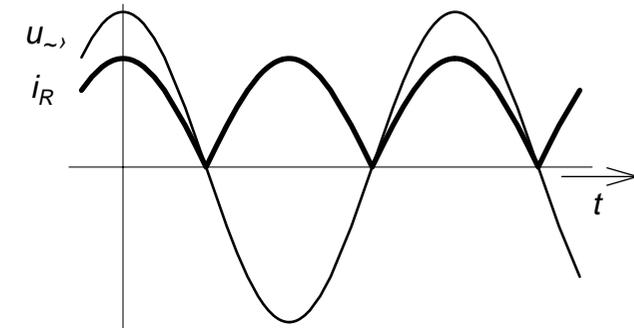
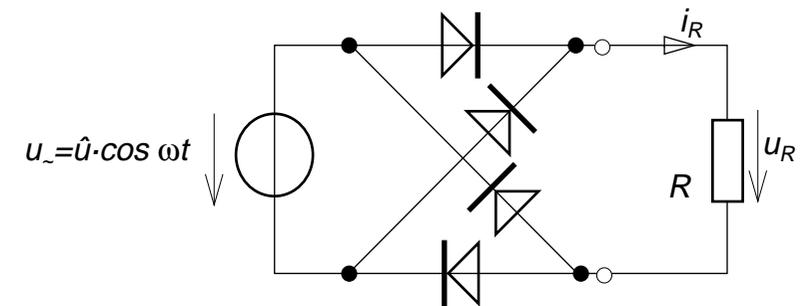
Dioden finden u.a. Anwendung für die Gleichrichtung von Wechselströmen, siehe Abschnitt 6 auf Seite 73. Die Skizze zeigt die Schaltung einer sog. *Halbwelligleichrichtung*. In den Stromkreis einer Wechselspannungsquelle und eines Verbraucherwiderstandes ist eine Diode eingeschaltet, die während der negativen Halbwelle der Wechselspannung einen Stromfluß entgegen dem Strompfeil verhindert. So können nur die positiven Halbwellen der Wechselspannungsquelle am Belastungswiderstand wirksam werden. Am Widerstand wird also eine *pulsierende* Gleichspannung abfallen.

Es liegt nun nahe, daß man auch die negative Halbwelle für die Speisung des Belastungswiderstandes nutzt. Dazu müßten die Leitungswege zwischen Widerstand und Spannungsquelle während der negativen Spannungsphase *umgepolt* werden. Dies wird durch eine sogenannte *Vollbrückenschaltung* erreicht, die in der nebenstehenden Skizze dargestellt ist. Die vier Dioden der Vollbrücke geben den Weg des Stroms zwischen Spannungsquelle und Belastungswiderstand so frei, daß in der negativen Spannungsphase die gewünschte Umpolung stattfindet und der Widerstand folglich immer in derselben Richtung vom Strom durchflossen wird. Der Widerstand wird jetzt mit einer Spannung gespeist, deren Zeitfunktion dem Betrag der Wechselspannung der Quelle entspricht.

Gleichrichterschaltungen stellen aus Wechselspannungen lediglich Spannungsverläufe her, die keine Vorzeichenwechsel mehr aufweisen. Um daraus *Gleichspannungen*, d.h. Spannungen mit weitgehend konstantem Zeitverlauf herzustellen (die sich z.B. für die Speisung von Elektronikschaltungen eignen), muß eine „Glättung“ folgen. Die Energie, die zur „Auffüllung“ der Spannungstäler benötigt wird, wird der Quelle während der Spannungsmaxima entnommen und in einem *Kondensator* gespeichert, der den Ausgangsklemmen des Gleichrichters, respektive dem Verbraucherwiderstand *parallel* zu schalten ist. Wie bei der Glättungsschaltung auf Seite 23 sorgen abwechselnde Lade- und Entladevorgänge auch in diesem Fall für einen ausgeglicheneren Spannungsverlauf, siehe nebenstehende Skizze.

5.2 Gesteuerte Elemente

Die Elektronik ist nicht denkbar ohne die Existenz von Netzwerkelementen, die es ermöglichen, den Energiefluß in einem Stromkreis durch eine elektrische Steuergröße zu beeinflussen. Die aufzubringende Steuerleistung ist dabei in der Regel sehr viel kleiner als die gesteuerte Leistung. Wir sprechen daher von „Verstärkerelementen“, wenn die gesteuerte (Ausgangs-)Größe eine kontinuierliche Funktion der steuernden (Eingangs-)Größe ist.



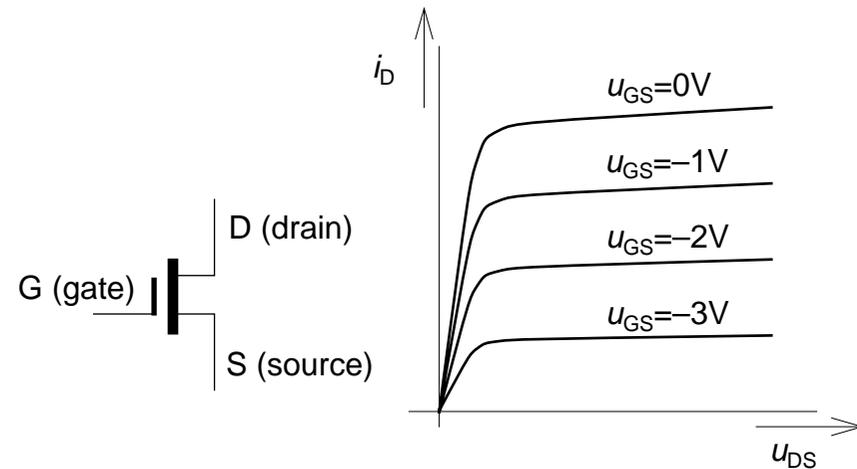
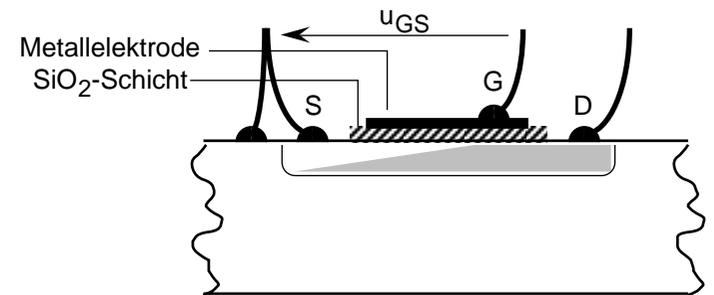
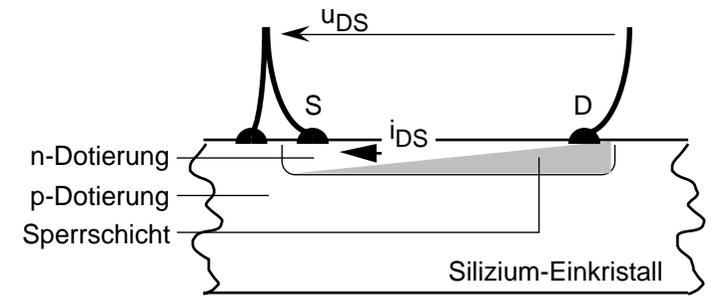
5.2.1 Der Transistor

Sowohl in der Informationstechnik als auch in der Leistungselektronik finden Verstärkerelemente auf Halbleiterbasis, Transistoren genannt, umfassende Anwendung.

Als Beispiel betrachten wir hier in einer stark vereinfachenden Weise den *Feldeffekt-Transistor* (FET). In die Oberfläche eines Silizium-Einkristallplättchens („Chip“) mit p-Grunddotierung ist durch Diffusion mit einem n-Donator ein sehr flacher leitfähiger Kanal zwischen zwei auf der Oberfläche angebrachten Zuführungsleitern („Source“ und „Drain“) entstanden. Am Boden des Kanals bildet sich die von der Halbleiterdiode her bekannte Sperrschicht (Rekombination der Ladungsträger und damit Aufhebung der Leitfähigkeit). Legt man an den Kanal eine Spannung u_{DS} an, so fließt ein Strom i_{DS} . Die am positiven Kanalende abgesaugten Elektronen führen dabei zu einer Ausdehnung der Sperrschicht, die bei Erhöhung der Spannung durch den als Folge wachsenden Strom zu einer Abschnürung des Kanals führt. Der Strom kann nun auch bei einer weiteren Erhöhung der Spannung nicht weiter zunehmen: Er wird auf einen nahezu konstanten Wert gedrosselt. Die Bezeichnungen *Source* und *Drain* versinnbildlichen in diesem Fall das Zuführen bzw. Absaugen von *negativen* Ladungsträgern.

Wird nun auf der Oberfläche des Kanals eine isolierte Elektrode angebracht, kann über die Einwirkung eines elektrischen Feldes das Eintreten des Abschnüreffektes beeinflusst werden. Die Spannung u_{GS} zwischen dieser sogenannten *Gate*-Elektrode G und der Source-Elektrode S bestimmt also den Wert, auf den der Strom i_{DS} zwischen der Source- und der Drain-Elektrode D begrenzt wird. Je größer die *negative* Ladung auf der Gate-Elektrode ist ($q = C \cdot u_{DS}$, Gl. (2-12) auf Seite 19), um so niedriger wird der Sättigungswert von i_{DS} . Dieser Steuereffekt ist im stationären Fall praktisch leistungslos, da der Gleichstromfluß über die Gate-Elektrode Fall vernachlässigbar ist.

Beschrieben werden kann dieser Effekt durch eine i/u -Kennlinienschar für den Source-Drain-Zweipol, bei der die Spannung zwischen Source und Gate (u_{GS}) der Parameter ist: Je höher die Gate-Spannung gegenüber der Source-Elektrode ist, desto enger wird der Kanal eingeschnürt, desto wirksamer wird also die Strombegrenzung.



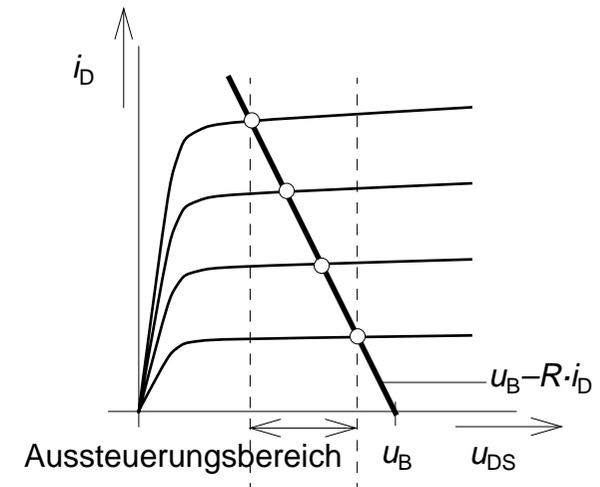
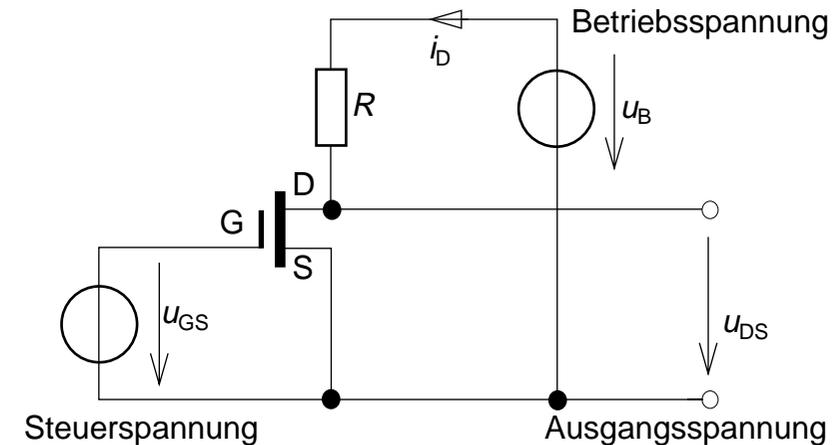
5.2.2 Anwendung: Steuerung des Stroms eines Laststromkreises

Als Verbraucher wird ein Widerstand in den Source-Drain-Stromkreis eines FET eingeschaltet. Die Steuerwirkung kann durch ein i_{DS}/u_{DS} -Kennlinienfeld beschrieben werden, in das die Widerstandsgerade des Lastwiderstandes eingezeichnet wird. Ist der Strom in diesem Stromkreis gleich Null, dann ist die Source-Drain-Spannung gleich der Betriebsspannung (u_B). Bei zunehmendem Strom reduziert sich die Drain-Source-Spannung um den Spannungsabfall am Widerstand. Die Widerstandsgerade beginnt deshalb bei u_B und ist nach links geneigt – umso stärker je kleiner der Widerstand ist. Die Abhängigkeit des Stroms durch diesen Stromkreis von der Steuerspannung (u_{GS}) wird aus der Folge der Schnittpunkte zwischen der Widerstandsgeraden $u_B - R \cdot i_{DS}$ und dem Transistorkennlinienfeld ersichtlich.

In Signalverarbeitungsschaltungen wird im allgemeinen die Drain-Source-Spannung als Ausgangsspannung verwendet. Bei entsprechender Parameterwahl kann dann eine große u_{DS} -Variation durch eine sehr viel kleinere u_{GS} -Variation erreicht werden. In diesem Fall sprechen wir von einem *Spannungsverstärker*. Wird u_{GS} positiver, dann wird u_{DS} allerdings negativer: Der Verstärker *invertiert* also die Steuerspannungsänderung. Durch den Einsatz von Entkopplungskondensatoren am Eingang sowie am Ausgang kann erreicht werden, daß lediglich der Wechselspannungsanteil der Eingangsspannung verstärkt wird (siehe Abschnitt 7.7 auf Seite 114).

5.2.3 Entkopplungsverstärker

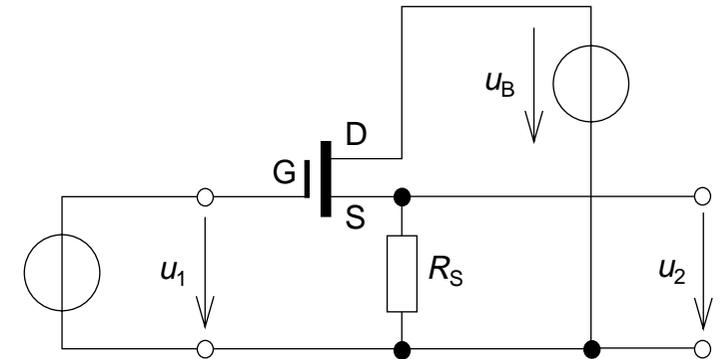
In Elektronikschaltungen für die Signalverarbeitung (siehe Abschnitt 7 auf Seite 105) ist es oft erforderlich, daß Teilnetzwerke voneinander *rückwirkungsfrei* entkoppelt werden. D.h., ein Teilnetzwerk soll ein weiteres Teilnetzwerk mit Signalenergie versorgen, für dieses also als Spannungs- oder Stromquelle wirken. Jedoch soll dieses Teilnetzwerk nicht auf das vorgeschaltete Teilnetzwerk zurückwirken, d.h. diesem keine Energie entziehen.



Zu diesem Zweck werden sogenannte Entkopplungsverstärkerstufen eingeschaltet. Eine einfache Entkopplungsverstärkerstufe ist in nebenstehender Skizze dargestellt. An den Ausgangsklemmen (u_2) stellt sich diese Schaltung als Spannungsquelle mit niedrigem Innenwiderstand dar, deren Spannung weitgehend identisch mit einer über die Eingangsklemmen angelegten Spannung u_1 ist.

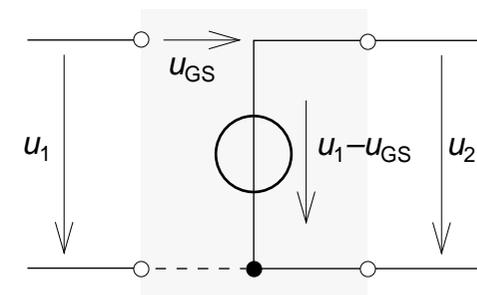
Eine solche Schaltung kann mit einem FET realisiert werden, indem als Ausgangsspannung die Spannung über einem in dem Source-Drain-Stromkreis geschalteten Widerstand R_S abgegriffen wird. Gesteuert wird der Transistor mittels der Differenzspannung aus Eingangsspannung und Spannungsfall an R_S . Als stabiler Arbeitspunkt stellt sich ein Source-Drain-Strom ein, bei dem der Spannungsabfall über den Widerstand R_S – also die Ausgangsspannung u_2 – immer gerade um die für diesen Strom notwendige Steuerspannung (u_{GS}) größer als die Steuerspannung u_1 ist (siehe nebenstehenden Maschengleichungsansatz). Ist u_{GS} sehr viel kleiner als u_2 , dann folgt u_2 allen Veränderungen von u_1 , ohne daß die Ausgangsbeschaltung die Signalquelle u_1 belastet, denn der Gate-Strom ist (wie oben beschrieben) vernachlässigbar klein.

Wir bezeichnen eine solche Schaltung als „Spannungsfolger“, für den das nebenstehende Ersatzschaltbild gilt. Zwischen zwei Teilnetzwerke geschaltet, wirkt die Gate-Source-Strecke für das eingangsseitige Teilnetzwerk lediglich als sehr kleine Kapazität. Wenn u_1 eine Gleichspannung ist, fließt also (nahezu) kein Strom, so daß auch (nahezu) keine Leistung aufgenommen wird. Für das ausgangsseitige Teilnetzwerk wirkt die Schaltung als gesteuerte Spannungsquelle, deren Spannung durch die Eingangsspannung festgelegt ist. Die Eingangsspannung kann innerhalb der durch das Kennlinienfeld gegebenen Grenzen variieren ($0 < u_1 < u_B$). Der Steuerungsmechanismus sorgt dafür, daß sie (nahezu) unabhängig vom Ausgangsstrom, d.h. von der aufzubringenden Leistung ist. Die gestrichelte Verbindung zwischen Eingangs- und Ausgangsstromkreis ist zwar physikalisch vorhanden. Für Netzwerkberechnungen kann sie jedoch außer acht gelassen werden, wenn die Teilnetzwerke keine weiteren Verbindungen untereinander besitzen.



$$u_1 = u_{GS} + u_2$$

$$u_2 \approx u_1 \text{ für } u_{GS} \ll i_D \cdot R$$

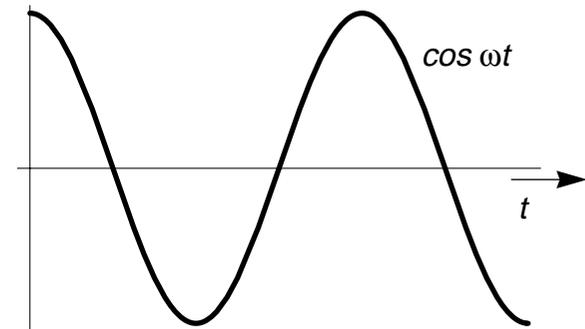


6 Wechselstrom

In der technischen Anwendung der Elektrizität spielen zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme eine weit größere Rolle als stationäre Größen (Gleichspannung, Gleichstrom). In der Informationstechnik verkörpern die zeitabhängigen Funktionen von Spannungen und Strömen die Information, die ein elektrisches Signal trägt (Beispiele: die Übersetzung von Schall-schwingungen in elektrische Signale für die Telephonie- und Audiotechnik oder die Kodierung digitaler Information als elektrische Impulsfolgen in der Datentechnik.). In der Energietechnik ermöglichen periodische Wechselgrößen die *Umspannung* elektrischer Energie: Mittels Transformatoren (siehe Seite 39 und Seite 99) kann die Spannung nach Bedarf übersetzt oder unter-
setzt werden. So können die Energieverluste bei der Fernübertragung elektrischer Energie durch Hochspannen erheblich reduziert werden (bei höherer Spannung kann dieselbe Leistung mit einem umgekehrt proportional niedrigeren Strom übertragen werden, so daß die im Leitungswiderstand „verheizte“ Leistung quadratisch abnimmt!).

Die Wechselstromlehre liefert die Methoden zur Behandlung von Netzwerken mit periodisch wechselnden Spannungen und Strömen. Sie fußt auf der Beschreibung der Zeitfunktionen der elektrischen Größen durch harmonische Schwingungen, mathematisch beschrieben durch *Sinus-* oder *Cosinus-*Funktionen. Harmonische Schwingungen besitzen aus mehreren Gründen eine besondere Bedeutung:

1. Sie stellen die Grundform des Induktionsspannungsverlaufs einer rotierenden Leiterschleife im stationären magnetischen Feld dar, siehe Seite 43.
2. Ihre mathematische Ableitung ergibt wieder eine harmonische Funktion (Differentiation und Integration, notwendig bei der Behandlung von Kapazität und Induktivität, siehe Seite 49, werden sehr einfach).



$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \cdot \sin \omega t$$

3. Jeder beliebige *periodische* Verlauf einer elektrischen Größe kann aus harmonischen Schwingungen zusammengesetzt werden: Die sogenannte *Fourier-Reihenentwicklung* erhält Bedeutung bei der Behandlung von Filterschaltungen, siehe Abschnitt 7.2 auf Seite 106).

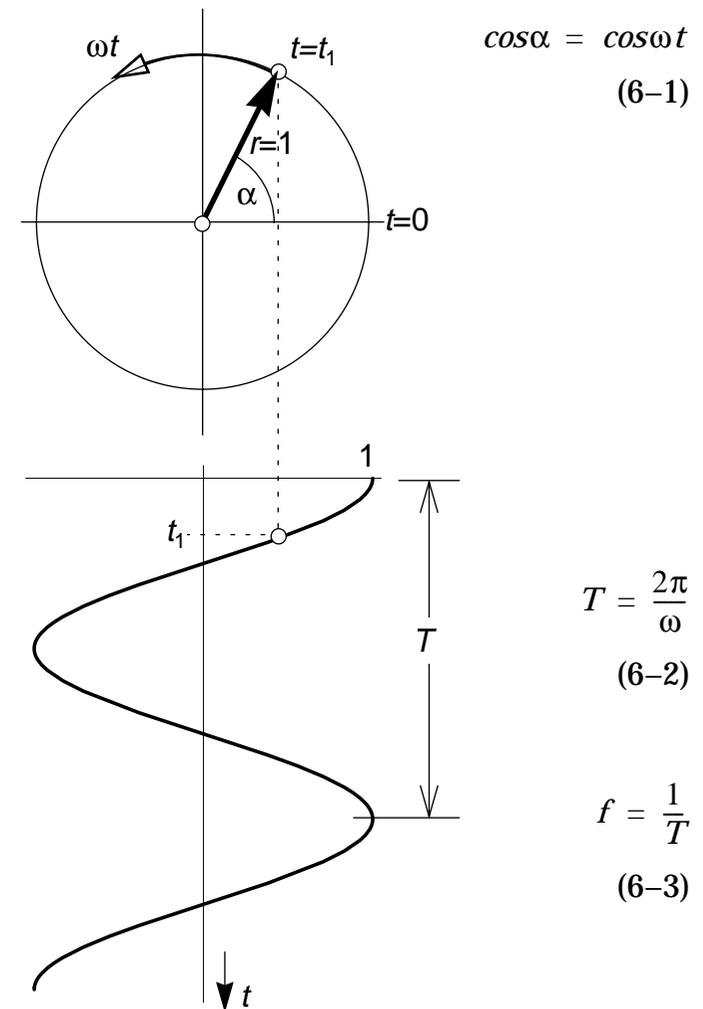
6.1 Die Cosinus-Schwingung

6.1.1 Definitionen

Von den beiden möglichen Schwingungsfunktionen wird die *Cosinus-Funktion* als Grundlage für die Beschreibung von Wechselgrößen festgelegt. Die Cosinusfunktion $\cos\omega t$ kann als Projektion eines Radius der Länge 1 (= „Zeiger“) aufgefaßt werden, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn (mathematisch positive Drehrichtung) rotiert. ω wird *Kreisfrequenz* (= Wiederholungsrate vollständiger Umläufe über $\alpha=2\pi$) genannt. Der Zeigerwinkel ωt wächst also mit der Zeit linear an.

Ein vollständiger Zeigerumlauf um den Winkel 2π findet in der Zeit T statt. Damit ergibt sich für die Cosinus-Funktion eine Wiederholung einer vollständigen Schwingung jeweils im Zeitabschnitt T . T wird deshalb *Periodendauer* genannt. T ist von der Winkelgeschwindigkeit abhängig Gl. (6-2). Die zur Periodendauer reziproke Größe f , Gl. (6-3) wird *Frequenz* genannt (die Wiederholrate vollständiger Schwingungen). Sie ist nach Gleichung Gl. (6-4) mit der Kreisfrequenz ω verknüpft.

Die Kreisfrequenz ω (Winkel pro Zeiteinheit) hat die Dimension 1/s, die Frequenz die Dimension *Hertz* (= Schwingungen pro Sekunde, 1 Hz = 1 Schwingung pro Sekunde; gebräuchlich sind kHz, MHz und GHz). In technischen Zusammenhängen wird üblicherweise die Frequenz f einer Wechselgröße angegeben, da sie einen direkten physikalischen Bezug hat, siehe Abschnitt 7.5 auf Seite 109. Bei den folgenden mathematischen Behandlungen



$$\cos\alpha = \cos\omega t \quad (6-1)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6-2)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (6-3)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$[f] = \text{Hz (Hertz)} \quad (6-4)$$

gen periodischer Vorgänge ist es dagegen praktischer, mit der Kreisfrequenz ω zu arbeiten, da sich dadurch das Aufstellen der Funktionen vereinfacht.

6.1.2 Wechselgrößen mit Phasenverschiebung

Die Schwingung einer Wechselgröße muß ihr Maximum nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ haben. Eine *positive* zeitliche Verschiebung einer Cosinus-Schwingung entsteht, wenn der rotierende Zeiger zum Zeitpunkt 0 um einen Winkel φ gegen die Drehrichtung aus der Projektionsachse versetzt ist.

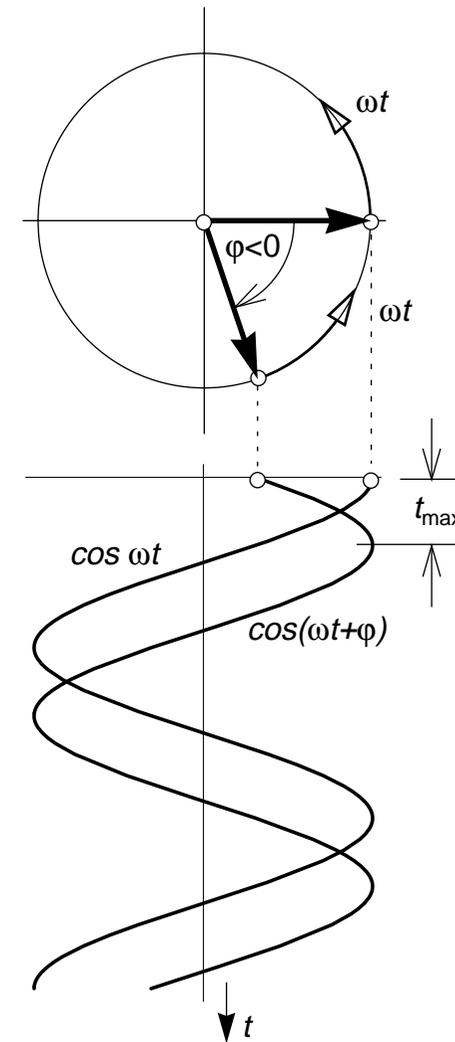
Nebenstehend ist als Beispiel eine *nacheilende* Cosinus-Schwingung skizziert. φ zählt positiv im *Gegenurzeigersinn*, muß also bei einer nacheilenden Cosinus-Schwingung negativ sein. Der Zeitpunkt t_{\max} des ersten Schwingungsmaximums ergibt sich nach Gleichung Gl. (6-5). Der Winkel φ wird als *Phasenwinkel* oder *Phasenlage* bezeichnet.

Von Bedeutung ist der Phasenwinkel vor allem, wenn die Relationen zwischen Wechselgrößen beschrieben werden sollen. Zwei Schwingungen derselben Frequenz können unterschiedliche Phasenlagen haben. In diesem Fall interessiert die *Phasen(winkel)differenz*. Sie gibt die *Phasenverschiebung* zwischen den Schwingungen an. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$: Die Schwingung 2 eilt der Schwingung 1 *vor*.
- $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$: Die Schwingung 2 eilt der Schwingung 1 *nach*.
- $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$: Die Schwingung 2 ist mit der Schwingung 1 „*in Phase*“

6.1.3 Die Amplitude einer Wechselgröße

Eine weiterer kennzeichnender Parameter einer Wechselgröße a ist ihre *Amplitude* \hat{a} , Gl. (6-6). Sie kennzeichnet den Funktionswert zum Zeitpunkt des Maximums der Funktion und wird daher auch *Spitzenwert* oder *Scheitelwert* genannt. Die Amplitude ist lediglich ein Maßstabsfaktor.



$$t_{\max} = -\frac{\varphi}{\omega} \quad (6-5)$$

$$a = \hat{a} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (6-6)$$

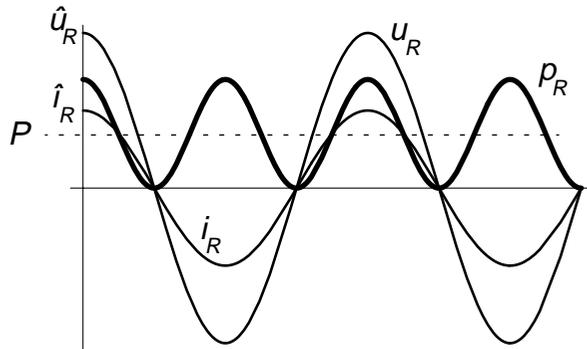
6.2 Spannung, Strom, Leistung an Zweipolen

Im folgenden werden die Strom/Spannungs-Verhältnisse der drei Grundelemente ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität in Wechselstromsystemen hergeleitet. Dabei wird jeweils davon ausgegangen, daß an den Klemmen des Zweipols eine Wechselspannung gemäß Gl. (6-7) anliegt.

6.2.1 Ohmscher Widerstand:

Nach Gleichung Gl. (1-14) auf Seite 11 ist der Strom i durch einen ohmschen Widerstand zu jedem Zeitpunkt proportional zur Spannung u . Dies gilt auch bei Wechselstrom, Gl. (6-8).

Die Leistung an einem ohmschen Widerstand – gemäß Gl. (1-13) auf Seite 10 das Produkt aus Strom und Spannung – pulsiert, wie aus Gl. (6-9) ersichtlich wird, mit der doppelten Frequenz der Spannung zwischen Null und dem Maximalwert $\hat{u} \cdot \hat{i}$. Die mittlere Leistung ist $\frac{1}{2} \cdot \hat{u} \cdot \hat{i}$.



Aus praktischen Gründen wird der sogenannte *Effektivwert* eingeführt, um die Höhe einer Wechselspannung oder die Stärke eines Wechselstromes zu bezeichnen. Der Effektivwert ist die Amplitude geteilt durch $\sqrt{2}$, Gl. (6-10).

$$u = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (6-7)$$

$$i_R = \frac{u_R}{R}$$

$$i_R = \frac{1}{R} \cdot \hat{u}_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \hat{i}_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\hat{i}_R = \frac{1}{R} \cdot \hat{u}_R \quad \varphi_i = \varphi_u \quad (6-8)$$

$$p_R = u_R \cdot i_R = \hat{u}_R \cdot \hat{i}_R \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_u)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$p_R = \frac{1}{2} \hat{u}_R \hat{i}_R [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] \quad (6-9)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u} \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} \quad (6-10)$$

Zur Unterscheidung gegenüber den entsprechenden zeitveränderlichen Größen werden für deren Effektivwerte große Buchstaben verwendet. Damit ergibt sich der Mittelwert P der Leistung bei Wechselspannung als Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung, Gl. (6–11), so daß Leistungsberechnungen wie bei Gleichspannung durchgeführt werden können. (Ein ohmscher Verbraucherwiderstand nimmt dieselbe Leistung bei Wechselspannung wie bei Gleichspannung auf, wenn der Effektivwert der Wechselspannung die Höhe der Gleichspannung hat.)

6.2.2 Induktivität

Grundsätzlich anders verhält sich die Induktivität. Im Unterschied zum ohmschen Widerstand sind Spannung und Strom nicht mehr in Phase, sondern der Strom eilt der Spannung an den Klemmen der Induktivität um eine Phasenwinkeldifferenz von 90° nach. Nehmen wir an, daß die Spannung über den Klemmen der Induktivität den Phasenwinkel $\varphi_u = 0$ hat, dann wird der Strom infolge der integralen Beziehung zwischen Strom und Spannung – Gl. (3–28) und Gl. (3–29) auf Seite 37 – eine *Sinus*-Schwingung, Gl. (6–12). Diese ist aber identisch mit einer *Cosinus*-Schwingung, die um 90° nacheilend verschoben ist, Gl. (6–13). Die Amplitude des Stroms ist – im Gegensatz zum ohmschen Widerstand – frequenzabhängig, Gl. (6–14).

Die physikalische Erklärung der Induktivität (siehe Abschnitt 3.6.1 auf Seite 35) macht das Nacheilen des Stroms plausibel: Ein Strom durch die Induktivität bewirkt ein Magnetfeld, das eine gespeicherte Energie verkörpert. Eine Spannung als "treibende Kraft" muß eine endliche Zeit gewirkt haben, um den Aufbau des Magnetfeldes, das dem Strom proportional ist, zu bewirken.

Deutlich wird dies bei der Betrachtung der Leistung, Gl. (6–15), $\varphi_u = 0$. Wieder erhalten wir eine mit der doppelten Frequenz pulsierende Momentanleistung. Im Gegensatz zum ohmschen Widerstand ist jedoch die mittlere Leistung Null! Während der positiven Leistungshalbwelle wird der Induktivität

$$P = \bar{P}_R = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_R \cdot \hat{i}_R = U_R \cdot I_R \quad (6-11)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int \hat{u}_L \cos(\omega t + \varphi_u) dt = \frac{1}{\omega L} \hat{u}_L \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (6-12)$$

$$\sin \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$$

$$i_L = \hat{i}_L \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{\omega L} \cdot \hat{u}_L \cos(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) \quad (6-13)$$

$$\hat{i}_L = \frac{1}{\omega L} \cdot \hat{u}_L \quad \varphi_i = \varphi_u - 90^\circ \quad (6-14)$$

$$p_L = u_L \cdot i_L = \hat{u}_L \cdot \hat{i}_L \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$p_L = U_L \cdot I_L \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (6-15)$$

$$P_L = \bar{P}_L = 0$$

Energie zugeführt, in der negativen Leistungshalbperiode gibt die Induktivität Energie ab. Dies entspricht dem mit dem pulsierenden Strom verknüpften Umbau des magnetischen Feldes.

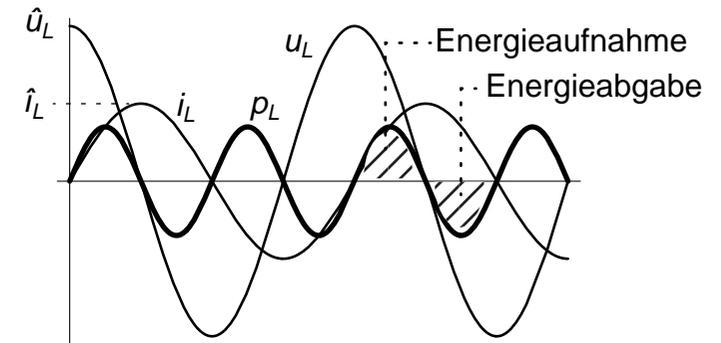
Eine Induktivität, die in einem Gleichstromnetzwerk als Kurzschluß wirkt, wirkt also in einem Wechselstromnetzwerk als eine besondere Art von Widerstand. Zwar ist hier wie beim ohmschen Widerstand eine Proportionalität zwischen Strom- und Spannungsamplitude gegeben, jedoch kommt eine Phasenverschiebung und eine Frequenzabhängigkeit hinzu. Ein essentieller Unterschied ist auch, daß der „induktive Widerstand“ keine Energie verbraucht, sondern dank seiner Speicherwirkung lediglich einen pulsierenden Energieaustausch bewirkt. In einer idealen Spule (Leiterwiderstand Null) geht keine Energie verloren!

6.2.3 Kapazität

Analog zur Induktivität können wir das Verhalten der Kapazität im Wechselstromnetzwerk entwickeln. Die differentielle Beziehung zwischen Strom und Spannung – siehe Gl. (2–13) auf Seite 20 – führt bei einer Cosinus-Schwingung der Spannung an den Klemmen der Kapazität zu einer Sinus-Schwingung des Stroms (mit negativem Vorzeichen), Gl. (6–16). Eine invertierte Sinus-Schwingung ist identisch mit einer 90° voreilenden Cosinus-Schwingung. Die Amplitude des Stroms ist auch bei der Kapazität frequenzabhängig, Gl. (6–17).

Physikalisch wird das Voreilen des Stroms plausibel, wenn wir uns in Erinnerung rufen, daß die Spannung am Kondensator durch seine Ladung gegeben ist, die erst durch einen Ladungstransport (Strom) in den Kondensator gelangen muß, siehe Abschnitt 2.3 auf Seite 18.

Auch bei der Kapazität pulsiert die Momentanleistung mit der doppelten Frequenz um den Mittelwert Null, Gl. (6–18). Der Wechsel von Energiezu-



$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \hat{u}_C \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi_u) = -\omega C \cdot \hat{u}_C \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$-\sin \alpha = \cos(\alpha + 90^\circ)$$

$$i_C = \hat{i}_C \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega C \cdot \hat{u}_C \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

(6–16)

$$\hat{i}_C = \omega C \cdot \hat{u}_C \quad \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ \quad (6-17)$$

fuhr und Energieabgabe entspricht dem periodischen Umbau des elektrischen Feldes, das mit der pulsierenden Spannung verknüpft ist.

Wie die Induktivität besitzt auch eine Kapazität, die im Gleichstromnetzwerk als Barriere wirkt, im Wechselstromnetzwerk einen endlichen (Wechselstrom-)Widerstand. Strom und Spannungsamplituden sind wiederum proportional. Dual zum induktiven Widerstand hat der kapazitive Widerstand eine *negative* Phasenverschiebung zur Folge, und seine Frequenzabhängigkeit ist gegenüber der Induktivität *reziprok*. Auch der kapazitive Widerstand verbraucht keine Energie, sondern bewirkt im Idealfall (unendlich hoher Widerstand des Dielektrikums, keine Zuleitungswiderstände) eine verlustlose Energiepulsation.

6.2.4 Blindwiderstände, Blindleistung

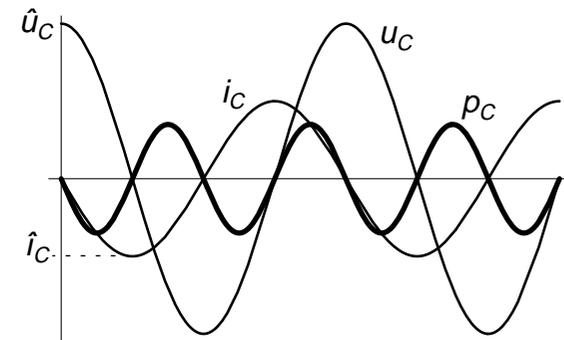
Induktivität und Kapazität entziehen dem Wechselstromnetzwerk keine Energie. Dennoch finden bei beiden Elementen periodische Leistungsflüsse statt, die energiemäßig in Zusammenschaltungen mit ohmschen Widerständen von Bedeutung sein werden, siehe Abschnitt 6.9 auf Seite 102. Analog zur Leistung am ohmschen Widerstand, der *Wirkleistung* P nach Gl. (6-11) auf Seite 77, führen wir für den Fall, daß Leistung *mittelwertfrei* pulsiert, den Begriff der *Blindleistung* Q ein, d.h. die Blindleistung ist genau wie die Wirkleistung das Produkt der *Effektivwerte* U und I von Spannung und Strom, wenn die Phasenverschiebung genau 90° vor- oder nachteilend ist. Induktivität und Kapazität werden deshalb in Wechselstromnetzwerken *Blindwiderstände* genannt.

Wir dürfen jedoch den Blindwiderstand nicht ohne weiteres wie den ohmschen Widerstand (auch *Wirkwiderstand* genannt) als Verhältnis zwischen Strom und Spannung definieren, wie es Gl. (6-14) auf Seite 77 und Gl. (6-17) auf Seite 78 nahelegen, da dabei sein Einfluß auf die Phasenbeziehung verlorengehe, wie im folgenden Beispiel demonstriert wird.

$$p_C = u_C \cdot i_C = -\hat{u}_C \cdot \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$p_L = -U_C \cdot I_C \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u) \quad (6-18)$$

$$P_C = \bar{p}_C = 0$$



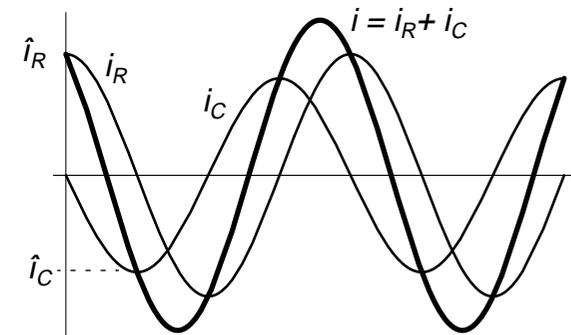
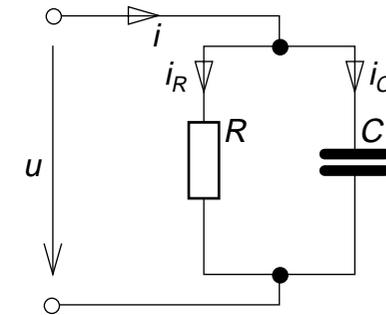
$$\begin{aligned} |Q_L| &= \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_L \cdot \hat{i}_L = U_L \cdot I_L \\ |Q_C| &= \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_C \cdot \hat{i}_C = U_C \cdot I_C \end{aligned} \quad (6-19)$$

6.2.5 Zusammenschaltung von Wirk- und Blindwiderständen

Daß auch in Wechselstromnetzwerken Wirk- und Blindwiderstände *keinesfalls* gleich behandelt werden dürfen, zeigt eine einfache Überlegung: Im Beispiel der Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Kapazität setzt sich der Gesamtstrom dieses zusammengesetzten Zweipols additiv aus einem *Wirkstrom* i_R in Phase mit u , und einem *Blindstrom* i_C , der gegenüber u und i_R um 90° voreilt, zusammen. Eine Addition lediglich der Amplituden von i_R und i_C wäre grob falsch! (Folglich würde auch die Anwendung der Formel für parallelgeschaltete Widerstände, Gl. (4–7) auf Seite 56 zu einem unbrauchbaren Ergebnis führen.) Korrekterweise müssen die gegeneinander phasenverschobenen Ströme über ihren gesamten Schwingungsverlauf miteinander addiert werden.

Dies ergibt wiederum eine harmonische Schwingung. Jedoch ist bereits in diesem einfachen Beispiel eine aufwendige trigonometrische Entwicklung erforderlich, um deren Amplitude und Phasenverschiebung zu berechnen.

Übersichtlicher und einfacher zu bearbeitende Verhältnisse, die es gestatten, alle formalen Vorgehensweisen der Berechnung von Gleichstromnetzwerken auch für Wechselstromnetzwerke mit Wirk- und Blindwiderständen zu übernehmen, schafft die im folgenden abgeleitete Theorie der *komplexen Wechselstromrechnung*.



6.3 Die komplexe Wechselstromrechnung

Die komplexe Wechselstromrechnung greift die geometrische Betrachtung auf, harmonische Schwingungen als Projektion rotierender Zeiger darzustellen. Der Amplitude der Schwingung entspricht die Länge des Zeigers, dem Phasenwinkel entspricht die Winkellage des Zeigers zum Zeitpunkt 0. Zwei Schwingungen *derselben* Frequenz, jedoch mit unterschiedlicher Amplitude und unterschiedlicher Phasenlage werden durch zwei entsprechende Zeiger

repräsentiert, die mit derselben Winkelgeschwindigkeit umlaufen, also ihre relative Lage zueinander stets beibehalten. Der Winkelversatz entspricht der Phasenverschiebung zwischen den beiden Schwingungen.

Die Summen- oder Differenzbildung dieser beiden Schwingungen kann nun *geometrisch erfolgen*, indem die Zeiger wie Vektoren geometrisch addiert oder voneinander subtrahiert werden.

Es ergibt sich ein resultierender Zeiger, der mit seiner Länge und seinem Winkelversatz die Summen- bzw. Differenzschwingung repräsentiert. Da die Zeiger ihre relative Lage zueinander nicht ändern, braucht die geometrische Konstruktion nur einmal vorgenommen werden – z. B. in der Ausgangslage ($t = 0$).

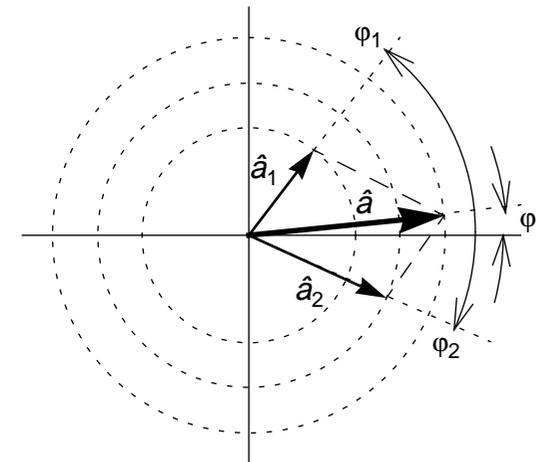
Zweckmäßig wäre es nun, für die geometrische Lösung dieses zweidimensionalen Problems eine arithmetische Darstellung zu finden. Die Mathematik bietet hierfür ein elegantes Werkzeug an: die Theorie der *komplexen Zahlen*.

6.3.1 Komplexer Zahlenraum und Arithmetik der komplexen Zahlen

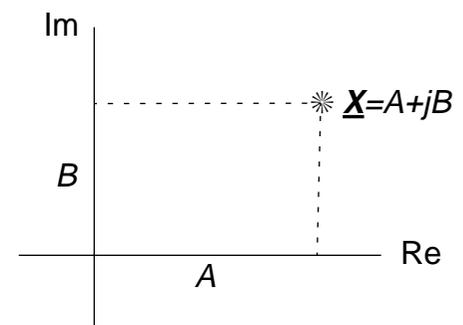
Die Theorie der komplexen Zahlen basiert auf der Einführung der *imaginären Einheit i* , für die in der Elektrotechnik *immer* der Buchstabe j geschrieben wird, um Verwechslungen mit dem Symbol für den elektrischen Strom zu vermeiden, Gl. (6–20). Eine imaginäre Zahl, d.h. das Vielfache jB der imaginären Einheit kann nicht im eindimensionalen Zahlenraum der *reellen* Zahlen dargestellt werden. Um *komplexe* Größen, die sich aus einem reellen Anteil A und einem imaginären Anteil jB zusammensetzen, darstellen zu können, muß der Zahlenraum um die imaginäre Dimension erweitert werden. Der zweidimensionale Raum, den die imaginäre und die reelle Zahlenachse aufspannen, wird *komplexer Zahlenraum* genannt. Jede beliebige komplexe Größe $\underline{X} = A + jB$ ist eindeutig durch einen Punkt in diesem Raum repräsentiert. Komplexe Größen werden im folgenden durch Fettdruck und

$$a_1 = \hat{a}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$a_2 = \hat{a}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$



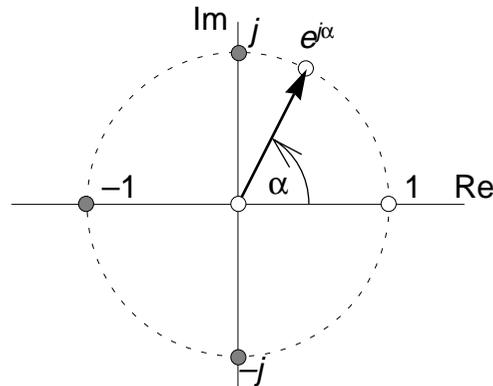
$$a = a_1 + a_2 = \hat{a} \cos(\omega t + \varphi)$$



$$j = \sqrt{-1} \quad j^2 = -1 \quad (6-20)$$

Unterstreichung gekennzeichnet. Gl. (6–21) stellt ihre allgemeine Schreibweise dar.

Aus der “Trickkiste” der Mathematik greifen wir den *Eulerschen Satz*, Gl. (6–22), der den Weg zu einer alternativen Darstellung der komplexen Größe öffnet. Für $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ beschreibt Gl. (6–22) in der komplexen Ebene einen Kreis mit dem Radius 1.



Statt in ihren kartesischen Koordinaten Realteil und Imaginärteil nach Gl. (6–21) kann eine komplexe Größe (d.h. ein Punkt in der komplexen Ebene) auch mittels des Eulerschen Satzes in ihren Polarkoordinaten Radius (Zeigerlänge) und Winkel dargestellt werden, Gl. (6–23). Die Zeigerlänge X wird auch “Betrag von \underline{X} ” genannt.

Die Umrechnung der kartesischen Form in die Polarkoordinatendarstellung erfolgt gemäß Gl. (6–24), die Umrechnung in umgekehrter Richtung gemäß Gl. (6–25).

$$\underline{X} = \operatorname{Re}(\underline{X}) + j\operatorname{Im}(\underline{X}) \quad (6-21)$$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \quad (6-22)$$

$$\underline{X} = X \cdot e^{j\alpha} \quad (6-23)$$

$$X = |\underline{X}| = \sqrt{\{\operatorname{Re}(\underline{X})\}^2 + \{\operatorname{Im}(\underline{X})\}^2}$$

$$\alpha = \operatorname{atan}\frac{\operatorname{Im}\underline{X}}{\operatorname{Re}\underline{X}} + k \cdot \pi \quad (6-24)$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{für } \operatorname{Re}(\underline{X}) \geq 0 \\ 1 & \text{für } \operatorname{Re}(\underline{X}) < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(\underline{X}) = X \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{Im}(\underline{X}) = X \cdot \sin\alpha \quad (6-25)$$

6.3.2 Zeigerdarstellung einer Wechselgröße

Die Darstellung einer beliebigen Wechselgröße $x(t)$ als rotierender Zeiger in der komplexen Ebene kann nun nach Gl. (6–26) erfolgen. Ihr Realteil (das ist die Projektion des Zeigers $\underline{x}(t)$ auf die reelle Achse) entspricht der physikalischen Schwingung $x(t)$. Ihr Imaginärteil (Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse) hat keine physikalische Entsprechung.

Für die Behandlung der Relation zwischen elektrischen Größen derselben Frequenz ω ist es nun praktisch, die Zeitabhängigkeit, (d.h. die Drehbewegung des Zeigers) abzutrennen. Sie tritt als Faktor $e^{j\omega t}$ in der komplexen Darstellung jeder Wechselgröße der Frequenz ω auf. $e^{j\omega t}$ stellt einen rotierenden Zeiger der Länge 1 mit der Phasenlage 0° dar. Das Abtrennen dieses Faktors kann auch als Festhalten der rotierenden Zeiger in ihrer Stellung zum Zeitpunkt 0 interpretiert werden.

Diese ‘festgehaltenen’ Zeiger bezeichnen wir in der Folge mit einem unterstrichenen Großbuchstaben. Ihre Länge (d.h. der Betrag der komplexen Größe) soll den *Effektivwert* der Wechselgröße darstellen, was sich für die Leistungsberechnung (Abschnitt 6.9 auf Seite 102) als praktisch erweist.

Um zur physikalischen Situation zurückzufinden, müssen wir alle in einem Zeigerdiagramm befindlichen Zeiger zum Zeitpunkt 0 beginnen lassen, aus ihrer Darstellungslage (φ_x) mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn zu rotieren, und ihre Projektion auf die reelle Achse über der Zeit aufzeichnen. Mit dem Hinzufügen des Terms $e^{j\omega t}$ setzen wir gleichsam die festgehaltenen Zeiger wieder in Rotation und erhalten aus ihrer Projektion auf die reelle Achse die physikalische Schwingung Gl. (6–28).

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x) \\
 \underline{x}(t) &= \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\
 \underline{x}(t) &= \hat{x} \{ \cos(\omega t + \varphi_x) + j \sin(\omega t + \varphi_x) \} \\
 x(t) &= \operatorname{Re} \{ \underline{x}(t) \} \\
 e^{m+n} &= e^m \cdot e^n \\
 \underline{x}(t) &= \hat{x} \cdot e^{j\varphi_x} \cdot e^{j\omega t} \quad (6-26)
 \end{aligned}$$

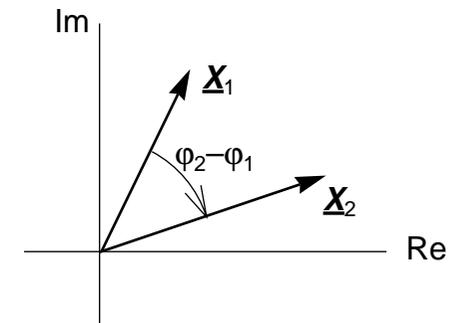
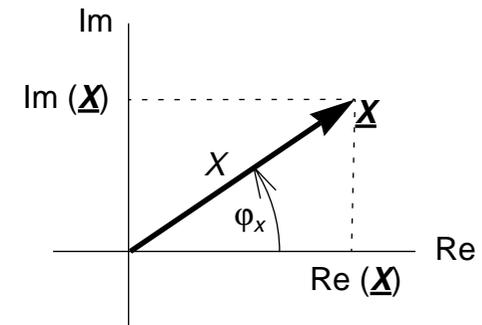
$$\begin{aligned}
 \underline{X} &= X \cdot e^{j\varphi_x} \quad (6-27) \\
 X &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \hat{x}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re} \{ \underline{X} \cdot e^{j\omega t} \} \quad (6-28)$$

6.3.3 Zeigerdiagramm

Aus dieser Konvention resultiert das (komplexe) *Zeigerdiagramm* für die Darstellung von Wechselgrößen und ihren Relationen zueinander. Der Zeiger gibt mit seiner Länge (Betrag der komplexen Größe) den Effektivwert und mit seiner Winkeldarstellung die Phasenlage zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Durch Länge X und Richtung φ_x ist der Zeiger vollständig beschrieben. Alternativ ist der Zeiger ebenfalls allein durch seine Achsenabschnitte $\text{Re}(\underline{X})$ und $\text{Im}(\underline{X})$ vollständig beschrieben. Der Winkel zwischen zwei Zeigern \underline{X}_2 und \underline{X}_1 gibt die Phasendifferenz $\varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den zwei Wechselgrößen x_2 und x_1 an. Das Längenverhältnis der beiden Zeiger entspricht dem Verhältnis ihrer Effektivwerte bzw. ihrer Amplituden. In dem skizzierten Fall eilt die kleinere Größe \underline{X}_1 der größeren \underline{X}_2 voraus. ($\varphi_2 - \varphi_1 < 0$ bedeutet, daß \underline{X}_2 im Uhrzeigersinn gegen \underline{X}_1 versetzt ist, siehe Seite 75.)

Die Darstellung von Wechselgrößen im komplexen Zahlenraum wurde eingeführt, um Verknüpfungen zwischen den Wechselgrößen wie Addition und Subtraktion von Wechselspannungen oder -strömen derselben Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Phasenlage sowie Verhältnisse zwischen Strom und Spannung an Zweipolen mit Phasenverschiebung mittels einfacher Rechenoperationen berechnen und grafisch übersichtlich darstellen zu können. Bevor wir uns mit der Anwendung der komplexen Darstellung für die Berechnung von Wechselstromnetzwerken befassen, werden zunächst die wichtigsten Grundoperationen zusammengestellt.



6.3.4 Rechenregeln

1. Addition, Subtraktion

Komplexe Zeiger werden wie zweidimensionale Vektoren geometrisch addiert und subtrahiert. Rechnerisch müssen Addition und Subtraktion daher in der karthesischen Darstellung vorgenommen werden, Gl. (6–29).

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}} &= \underline{\mathbf{X}}_1 \pm \underline{\mathbf{X}}_2 = \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}}) + j\operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}}) \\ \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}}) &= \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}}_1) \pm \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}}_2) \\ \operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}}) &= \operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}}_1) \pm \operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}}_2) \quad (6-29)\end{aligned}$$

2. Multiplikation, Division und Reziprokwertbildung

werden zweckmäßigerweise in der Polarkoordinatendarstellung vorgenommen:

2a. Multiplikation Gl. (6–30)

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}} &= \underline{\mathbf{X}}_1 \cdot \underline{\mathbf{X}}_2 = X \cdot e^{j\varphi} \\ \underline{\mathbf{X}} &= X_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot X_2 \cdot e^{j\varphi_2} = X_1 \cdot X_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ X &= X_1 \cdot X_2 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (6-30)\end{aligned}$$

2b. Reziprokwertbildung Gl. (6–31)

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}} &= \frac{1}{\underline{\mathbf{X}}_2} = \frac{1}{X_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{1}{X_2} \cdot e^{-j\varphi_2} \\ X &= \frac{1}{X_2} \quad \varphi = -\varphi_2 \quad (6-31)\end{aligned}$$

2c. Division Gl. (6–32)

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}} &= \frac{\underline{\mathbf{X}}_1}{\underline{\mathbf{X}}_2} = \frac{X_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{X_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{X_1}{X_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ X &= \frac{X_1}{X_2} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6-32)\end{aligned}$$

3. *Umrechnung polar/karthesisch*

Zur Umrechnung zwischen den beiden gleichwertigen Darstellungsformen greifen wir auf Gl. (6-24) und Gl. (6-25) auf Seite 82 zurück. Für den üblichen Fall, daß der Realteil positiv ist, gilt Gl. (6-33).

$$\begin{aligned}
 X &= |\underline{\mathbf{X}}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{\mathbf{X}}) + \operatorname{Im}^2(\underline{\mathbf{X}})} \\
 \alpha &= \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}})}{\operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}})} \\
 \operatorname{Re}(\underline{\mathbf{X}}) &= X \cdot \cos \alpha \\
 \operatorname{Im}(\underline{\mathbf{X}}) &= X \cdot \sin \alpha \quad (6-33)
 \end{aligned}$$

4. *Komplexer Nenner*

Tritt ein komplexer Ausdruck $\underline{\mathbf{X}}$ im Nenner auf, dann kann man den Nenner durch Erweiterung mit dem *konjugiert komplexen* Ausdruck $\underline{\mathbf{X}}^*$ reell machen und erhält die für eine weiterführende Rechnung benötigte karthesische Normaldarstellung, Gl. (6-34); $j^2 = -1$!

Diese Regel kann auch bei der Bildung des Kehrwertes einer komplexen Größe in karthesischer Darstellung angewandt werden, um die zweimalige Anwendung der Regel 3 zu vermeiden.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\underline{\mathbf{X}}} &= \frac{1}{A + jB} \\
 \underline{\mathbf{X}}^* &= A - jB \\
 \frac{\underline{\mathbf{X}}^*}{\underline{\mathbf{X}} \cdot \underline{\mathbf{X}}^*} &= \frac{A - jB}{(A + jB)(A - jB)} \\
 \frac{1}{\underline{\mathbf{X}}} &= \frac{A}{A^2 + B^2} - j \frac{B}{A^2 + B^2} \quad (6-34)
 \end{aligned}$$

5. *Sonderfälle des Phasenwinkels*

Aus dem Eulerschen Satz Gl. (6-22) auf Seite 82 können einige einfache Umrechnungen für Winkel $n \cdot \pi/2$ abgeleitet werden, siehe Gl. (6-35).

$$\begin{aligned}
 e^{j0^\circ} &= 1 & (6-35) \\
 e^{j90^\circ} &= j \\
 e^{j180^\circ} &= -1 \\
 e^{j270^\circ} &= e^{-j90^\circ} = -j = \frac{1}{j}
 \end{aligned}$$

6.4 Anwendung der komplexen Rechnung

6.4.1 Komplexe Darstellung von Spannung und Strom

Nach Gl. (6–26) und Gl. (6–27) auf Seite 83 ist die komplexe Darstellung einer Wechselspannung durch Gl. (6–36), die komplexe Darstellung eines Wechselstroms durch Gl. (6–37) gegeben.

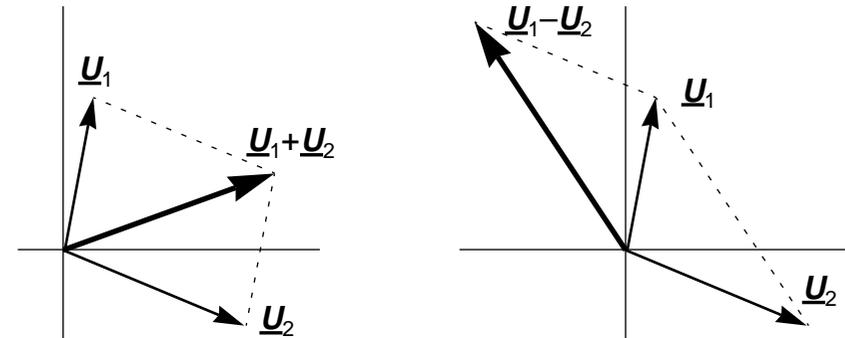
Unter Anwendung der Regel 1 können komplexe Ströme bzw. komplexe Spannungen miteinander addiert werden oder voneinander subtrahiert werden. Dazu muß ggf. die karthesische Form nach Regel 3 hergestellt werden. Die arithmetische Vorgehensweise entspricht dann der graphischen Lösung, siehe Skizze.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (6-36)$$

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \quad U = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{u}$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (6-37)$$

$$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \quad I = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{i}$$



6.4.2 Der komplexe Widerstand

Lineare passive Zweipole (ohmsche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten sowie beliebige Zusammenschaltungen dieser Elemente) werden vollständig beschrieben durch die Relation zwischen Strom und Spannung an ihrem Klemmenpaar. Während bei der Behandlung im Zeitbereich für Kapazität und Induktivität Differential- bzw. Integralgleichungen zu lösen sind, kommt die komplexe Behandlung mit den arithmetischen Grundoperationen aus.

Die Relation zwischen Strom und Spannung in *linearen* Wechselstromsystemen ist durch die komplexe Gleichung (6–38) gegeben. Nach Regel 2c (Seite 85) setzt \underline{Z} die Beträge von \underline{I} und \underline{U} bzw. die Amplituden von i und u ins Verhältnis und beschreibt die Phasenverschiebung zwischen i und u .

Ein passiver Zweipol, der weder rein reell (ohmscher Widerstand) noch rein imaginär (Blindwiderstand) ist, besitzt einen *Scheinwiderstand*, der sich aus Realteil und Imaginärteil (Blindanteil) zusammensetzt.

In nebenstehender Skizze wurde die Phasenlage der Spannung als *Bezugsphase* angenommen ($\varphi_u = 0$). \underline{U} - und \underline{I} -Zeiger dürfen in ein gemeinsames komplexes Diagramm eingezeichnet werden, da beide als Drehzeiger mit identischer Kreisfrequenz ω aufgefaßt werden können. Die Zeigerlänge von \underline{I} (Betrag von \underline{I}) ergibt sich aus dem Quotienten von U und Z . Der \underline{I} -Zeiger ist um den Phasenwinkel des \underline{Z} -Zeigers im Uhrzeigersinn gegen den Spannungszeiger verdreht, wenn φ_z positiv ist (= *nacheilend*). Er ist gegen den Uhrzeigersinn verdreht, wenn φ_z negativ ist (= *voreilend*). Der \underline{Z} -Zeiger darf *nicht* in das \underline{U} - \underline{I} -Diagramm gezeichnet werden, denn \underline{Z} ist ein *komplexer Parameter*. Ihm liegt keine periodische Zeitfunktion zugrunde, so daß er nicht als Drehzeiger aufgefaßt werden darf. Für alle Darstellungen und Manipulationen des komplexen Widerstandes muß also ein eigenes komplexes Diagramm angelegt werden.

Gl. (6–19) wird wegen der formalen Übereinstimmung als „Ohmsches Gesetz der komplexen Wechselstromrechnung“ bezeichnet. \underline{Z} ist darin der *komplexe Widerstand*, der durch Betrag Z und Phase φ_z definiert ist.

Im folgenden werden die komplexen Widerstände der passiven Zweipole ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität angegeben.

Ohmscher Widerstand (Wirkwiderstand)

Beim ohmschen Widerstand R sind Strom und Spannung in Phase (siehe Abschnitt 6.2.1 auf Seite 76), d.h. das Verhältnis ihrer Amplituden ist allein

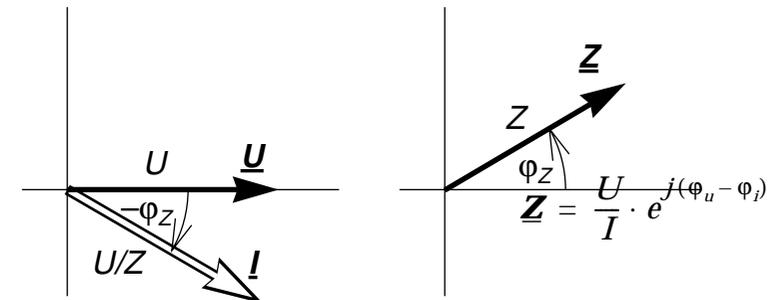
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad (6-38)$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j\operatorname{Im}(\underline{Z})$$

$$I \cdot e^{j\varphi_i} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_u}}{Z \cdot e^{j\varphi_z}} = \frac{U}{Z} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_z)}$$

$$I = \frac{U}{Z} \quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi_z$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$



$$i_R = \frac{u_R}{R} \quad \hat{i}_R = \frac{\hat{u}_R}{R}$$

$$\varphi_i = \varphi_u$$

$$\underline{Z}_R = R \cdot e^{j0^\circ} = R \quad (6-39)$$

durch das Ohmsche Gesetz – Gl. (1–14) auf Seite 11 – gegeben. Die komplexe Schreibweise für den ohmschen Widerstand führt also zu einem rein reellen Term, Gl. (6–39).

Induktiver Blindwiderstand

Aus Abschnitt 6.2.2 auf Seite 77 entnehmen wir den Proportionalitätsfaktor des Amplitudenverhältnisses von Strom und Spannung ($1/\omega L$) und die Phasenverschiebung des Stroms gegenüber der Spannung (-90°). Nach der Definition von \underline{Z} , Gl. (6–38), leitet sich daraus der komplexe Widerstand der Induktivität ab, Gl. (6–40).

Die Anwendung von Regel 5 (Seite 86) macht deutlich, daß der induktive Widerstand durch einen rein imaginären Term beschrieben wird.

Kapazitiver Blindwiderstand

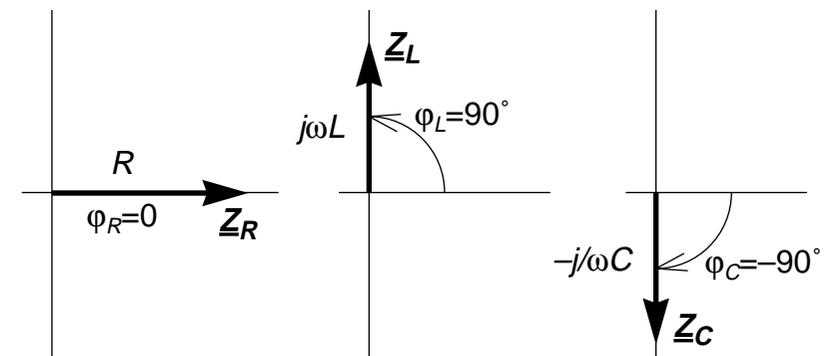
Analog zum induktiven Blindwiderstand kann beim kapazitiven Blindwiderstand vorgegangen werden.

Wir entnehmen Abschnitt 6.2.3 auf Seite 78 wieder den Proportionalitätsfaktor des Amplitudenverhältnisses von Strom und Spannung (ωC) und die Phasenverschiebung des Stroms gegenüber der Spannung ($+90^\circ$). Nach der Definition von \underline{Z} leitet sich daraus der komplexe Widerstand der Kapazität ab, Gl. (6–41).

Wiederum macht die Anwendung von Regel 5 (Seite 86) deutlich, daß der kapazitive Widerstand durch einen rein imaginären Term beschrieben wird, der jedoch im Gegensatz zum induktiven Blindwiderstand ein *negatives* Vorzeichen hat.

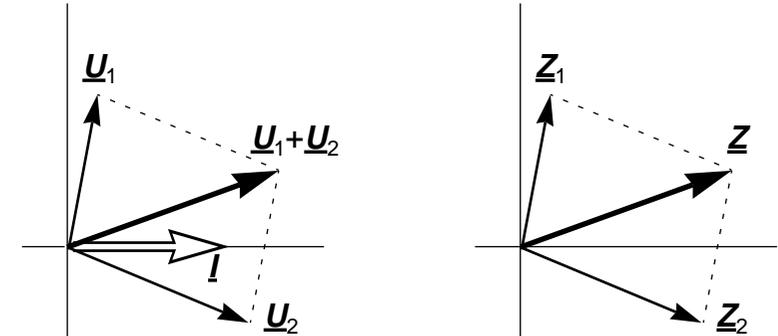
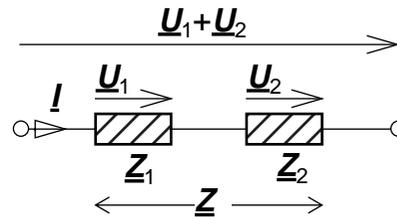
$$\begin{aligned}
 i_L &= \frac{1}{L} \int u_L dt & \hat{i}_L &= \frac{\hat{u}_L}{\omega L} \\
 & & \varphi_i &= \varphi_u - 90^\circ \\
 Z_L &= \omega L & \varphi_L &= \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ \\
 \underline{Z}_L &= \omega L \cdot e^{j90^\circ} = j\omega L & & (6-40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_C &= C \frac{du_C}{dt} & \hat{i}_C &= \omega C \cdot \hat{u}_C \\
 & & \varphi_i &= \varphi_u + 90^\circ \\
 Z_C &= \frac{1}{\omega C} & \varphi_C &= \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ \\
 \underline{Z}_C &= \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j90^\circ} = -j \frac{1}{\omega C} & & (6-41)
 \end{aligned}$$



6.5 Netzwerkberechnung in komplexer Darstellung

6.5.1 Serienschaltung von Wechselstromwiderständen



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2}{\underline{I}}$$

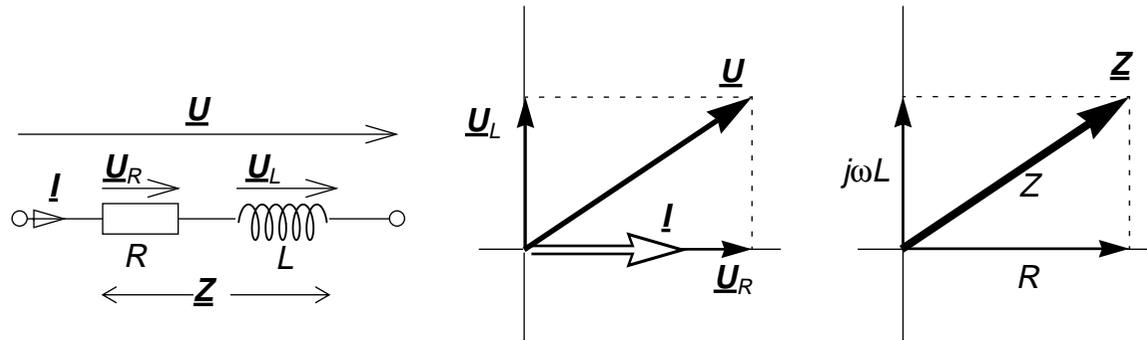
Wie im Gleichstromfall (Abschnitt 4.2.4 auf Seite 53) ist auch bei Wechselstrom die Gesamtspannung \underline{U} über zwei in Serie geschalteten Wechselstromwiderständen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 , die vom selben Strom \underline{I} durchflossen werden, gleich der Summe der Teilspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 . Die Serienschaltung kann also ersetzt werden durch einen Ersatzscheinwiderstand, der durch Summation der komplexen Einzelwiderstände nach Regel 1 (Seite 85) analog zum Gleichstromfall Gl. (4–2) auf Seite 54 gebildet wird, Gl. (6–42).

Das \underline{U} -Zeigerdiagramm ist im folgenden auf die Phasenlage des gemeinsamen Stroms ($\varphi_I = 0$) bezogen. Dann entsprechen die \underline{Z} -Zeiger in Länge und Winkel den \underline{U} -Zeigern, und der resultierende Scheinwiderstand kann genau wie die Gesamtspannung geometrisch konstruiert werden.

Die geometrische Konstruktion von \underline{Z} ist besonders einfach, wenn seine Komponenten wie in den folgenden Beispielen rein ohmsche Widerstände und reine Blinwiderstände sind, da R genau auf der reellen Achse und $j\omega L$ bzw. $-j/\omega C$ genau auf der imaginären Achse liegen.

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I} & \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} \\ \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{aligned} \quad (6-42)$$

Beispiel RL-Serienschaltung, Gl. (6-43)

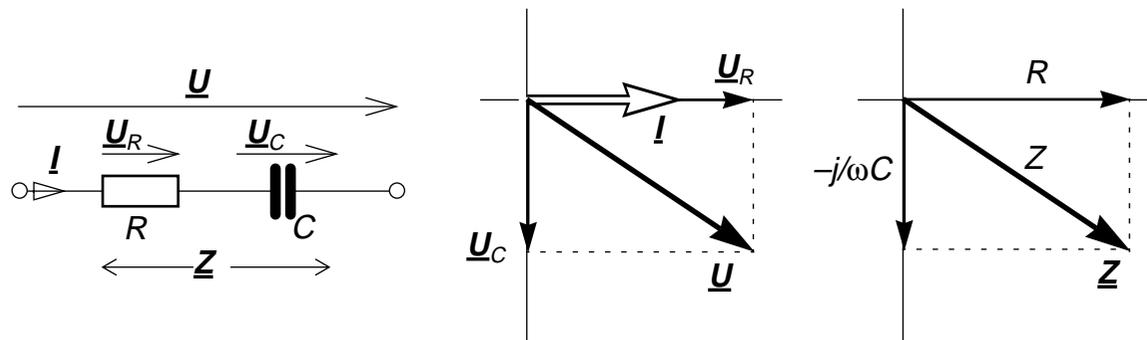


$$\underline{Z} = R + j\omega L = R \left(1 + j \frac{\omega L}{R} \right)$$

$$Z = R \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2}$$

$$\varphi_z = \text{atan} \frac{\omega L}{R} \quad (6-43)$$

Beispiel RC-Serienschaltung, Gl. (6-44)



$$\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C} = R \left(1 - j \frac{1}{\omega CR} \right)$$

$$Z = R \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR} \right)^2}$$

$$\varphi_z = -\text{atan} \frac{1}{\omega CR} \quad (6-44)$$

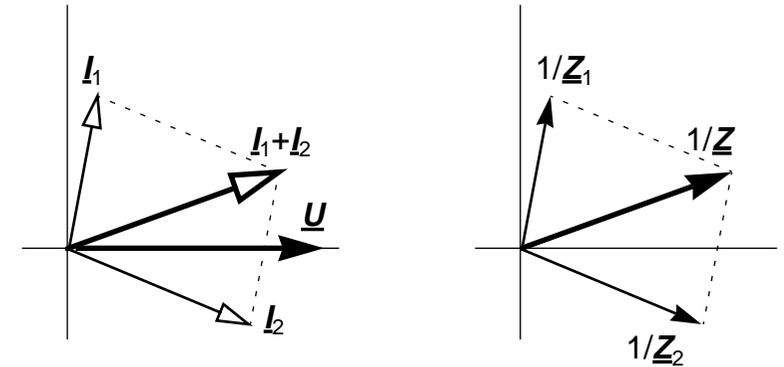
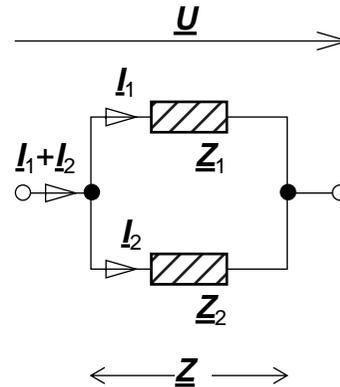
Ist ein vom Aufbau her unbekannter Zweipol gegeben, von dem lediglich der komplexe Gesamtwiderstand \underline{Z} bekannt ist (z.B. durch Messung von Strom- und Spannungseffektivwert sowie der Phasendifferenz), kann dieser Zweipol als Serienschaltung aus Ersatzwiderstand (= Realteil von \underline{Z}) und Ersatzblindwiderstand (= Imaginärteil von \underline{Z}) interpretiert werden. Ist der Imaginärteil positiv, ist der Ersatzblindwiderstand ein induktiver Widerstand. Ist der Imaginärteil negativ, ist der Ersatzblindwiderstand ein kapazitiver Widerstand, Gl. (6-45).

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j\text{Im}(\underline{Z}) \quad (6-45)$$

$$\text{Re}(\underline{Z}) = R$$

$$\text{Im}(\underline{Z}) = \begin{cases} \omega L; & \text{wenn } \text{Im}(\underline{Z}) > 0 \\ -1/\omega C; & \text{wenn } \text{Im}(\underline{Z}) < 0 \end{cases}$$

6.5.2 Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen



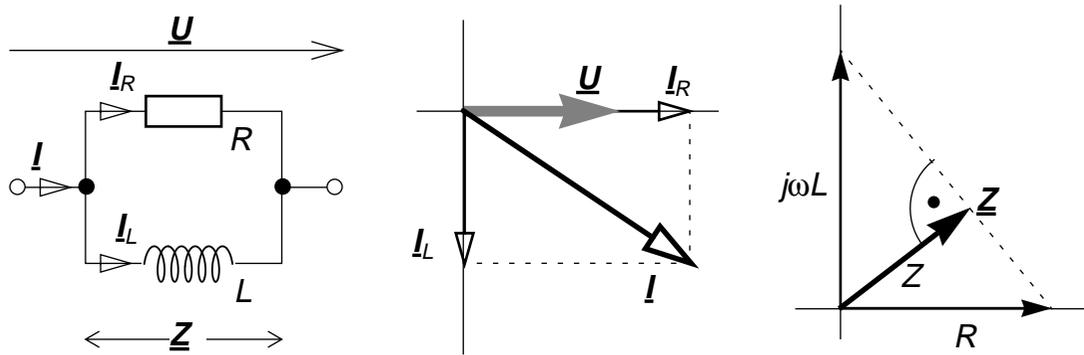
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}_1 + \underline{I}_2}{\underline{U}}$$

Bei der Parallelschaltung zweier Wechselstromwiderstände \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 liegt an beiden Widerständen dieselbe Spannung \underline{U} . Hier addieren sich die beiden Teilströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 zu einem Gesamtstrom \underline{I} . Wie im Gleichstromfall (Abschnitt 4.3.2 auf Seite 55) ist daher auch im Wechselstromfall der Kehrwert des Gesamtwiderstands der Parallelschaltung analog Gl. (4–8) auf Seite 56 gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände, Gl. (6–46).

Für die geometrische Konstruktion von \underline{Z} müßten im Fall der Parallelschaltung die Kehrwertzeiger addiert werden und vom resultierenden Zeiger wieder der Kehrwert gebildet werden (Reziprokwert der Zeigerlänge und Invertierung des Zeigerwinkels, siehe Regel 2b, Seite 85). Eine einfache geometrische Konstruktion für den Fall, daß \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 einen rechten Winkel einschließen, ist in der Skizze dargestellt: \underline{Z}_p ist das Lot auf die Verbindungsgerade der \underline{Z} -Zeiger.

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} & \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} \\ \underline{I} &= \underline{U} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) \\ \frac{1}{\underline{Z}_p} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{aligned} \quad (6-46)$$

Beispiel: RL-Parallelschaltung, Gl. (6-47)

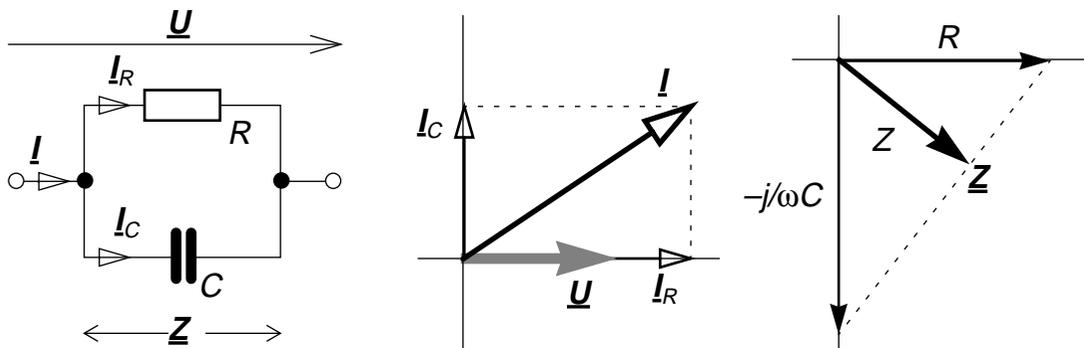


$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} \left(1 - j \frac{R}{\omega L} \right) \quad (6-47)$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} \cdot \left(1 + j \frac{R}{\omega L} \right)$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2}} \quad \varphi_z = \operatorname{atan} \frac{R}{\omega L}$$

Beispiel: RC-Parallelschaltung, Gl. (6-48)



$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{R} (1 + j\omega CR) \quad (6-48)$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \cdot (1 - j\omega CR)$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad \varphi_z = -\operatorname{atan} \omega CR$$

RL-Parallelschaltung und RC-Parallelschaltung können jeweils durch eine äquivalente RL- bzw. RC-Serienschaltung ersetzt werden, indem Realteil und Imaginärteil der Parallelschaltung aus Gl. (6-47) bzw. Gl. (6-48) sinngemäß in Gl. (6-43) bzw. Gl. (6-44) auf Seite 91 eingesetzt werden. In Gl. (6-49) sind die Seriensatzelemente R' und C' für eine RC-Parallelschaltung angegeben.

$$R' = \frac{1}{1 + (\omega CR)^2} \cdot R$$

$$\frac{1}{\omega C'} = \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \quad (6-49)$$

$$C = \left\{ 1 + \frac{1}{(\omega CR)^2} \right\} \cdot C$$

Umgekehrt kann auch eine komplexe Serienschaltung durch eine äquivalente Parallelschaltung ersetzt werden. In diesem Fall wird der Kehrwert von Gl. (6-43) bzw. Gl. (6-44) auf Seite 91 gebildet und nach Regel 4 (Seite 86) in Realteil und Imaginärteil zerlegt. Letztere ergeben dann die Kehrwerte der Ersatzparallelelemente.

Ist \underline{Z} in Polardarstellung gegeben, dann wird der Kehrwert nach Regel 2b (Seite 85) gebildet und daraus nach Regel 3 Real- und Imaginärteil hergeleitet.

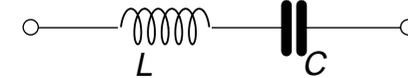
Auf diese Weise kann auch die äquivalente RL- oder RC-Parallelschaltung eines unbekanntem komplexen Zweipols bestimmt werden, wenn lediglich Betrag und Phase dieses Zweipols bekannt sind.

In allen Fällen entscheidet das Vorzeichen des Imaginärteils, ob der Ersatzblindzweipol induktiv (Kehrwert negativ) oder kapazitiv (Kehrwert positiv) ist.

6.5.3 LC-Schaltungen

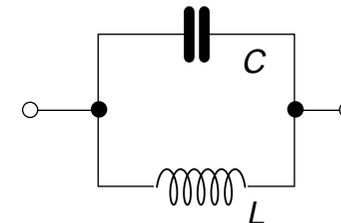
Selbstverständlich können auch induktive Widerstände und kapazitive Widerstände zusammengeschaltet werden. Wegen der gegenläufigen Phasendrehung tritt dabei ein *Kompensationseffekt* auf:

- Bei der Serienschaltung wird der Gesamtblindwiderstand Gl. (6-50) *kleiner* als die kleinste Komponente, im Sonderfall $\omega^2 LC = 1$ heben sie sich gegenseitig auf ($\underline{Z} = 0$).
- Bei der Parallelschaltung wird der Gesamtwiderstand Gl. (6-51) *größer* als die größte Komponente, im Sonderfall $\omega^2 LC = 1$ sperrt die Parallelkombination den Wechselstrom vollständig ($\underline{Z} \rightarrow \infty$). Diese Kombination wird daher *Sperrkreis* genannt.



$$\underline{Z} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\underline{Z} = 0 \text{ für } \omega^2 LC = 1 \quad (6-50)$$



$$\frac{1}{\underline{Z}} = j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\underline{Z} \rightarrow \infty \text{ für } \omega^2 LC = 1 \quad (6-51)$$

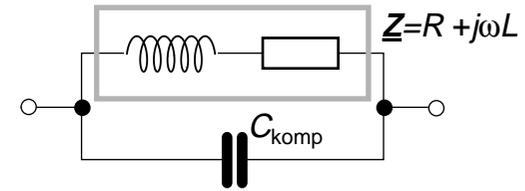
Da die vollständige Kompensation nur bei elektrischen Signalen mit genau der Frequenz ω auftritt, die die Kompensationsbedingung erfüllt, können LC-Kombinationen zur Selektion einzelner Signalkomponenten aus Signalgemischen dienen.

Andererseits kann durch Hinzuschalten eines komplementären Blindwiderstandes die Blindkomponente eines gegebenen Zweipols kompensiert werden. Als Beispiel sei ein Drahtwiderstand genannt, bei dem der Widerstandsleiter auf einem Wickelkörper aufgewickelt ist. Als parasitären Effekt besitzt diese Widerstandsspule eine Induktivität. Ersatzweise wird dieses Bauelement als Serienschaltung von (gewolltem) R und (ungewolltem) L interpretiert. Die Kompensation soll mittels Parallelkapazität erfolgen. Wir bilden den Kehrwert von \underline{Z} und fügen den Kehrwert des Blindwiderstands der Kompensationskapazität additiv hinzu (Parallelschaltung!). Eine vollständige Kompensation des induktiven Blindwiderstandes ist erreicht, wenn sich die imaginären Anteile gegenseitig aufheben. Dann wird der Imaginärteil von $1/\underline{Z}_{ges}$ Null. Damit wird auch \underline{Z}_{ges} rein reell, Gl. (6-52).

Eine Kompensation des Blindanteils von \underline{Z} hätte auch durch eine Serienkapazität erreicht werden können (die Rechnung wäre sogar einfacher gewesen). Wenn der induktive Widerstand jedoch betragsmäßig klein gegen den Wirkwiderstand ist (dies ist in der Regel der Fall, wenn die Induktivität aufgrund eines parasitären Effekts entsteht), kann die Kompensation in Parallelschaltung mit einer sehr viel kleineren Kapazität erfolgen (Kostenfaktor!). Hinzu kommt, daß die Kompensation, solange ωL sehr viel kleiner als R ist, näherungsweise frequenzunabhängig ist.

6.5.4 Komplexer Spannungsteiler

Wirk- und Blindwiderstände können als Spannungsteiler (Seite 53) zusammengeschaltet werden, siehe Kasten auf Seite 110. Sinngemäß gilt dann die komplexe Form Gl. (6-53) der Spannungsteilerformel Gl. (4-1) auf Seite 53. Als Schaltungssymbol für einen komplexen Widerstand ist allgemein das Symbol für den ohmschen Widerstand üblich. Zur Vermeidung von Verwechslung werden wir hier jedoch ein schraffiertes Rechteck verwenden.

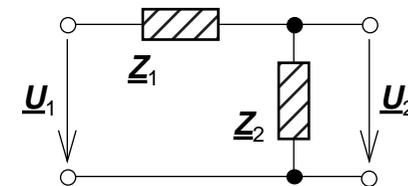


$$\frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C_{komp}$$

$$\omega C_{komp} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cong \frac{\omega L}{R^2}$$

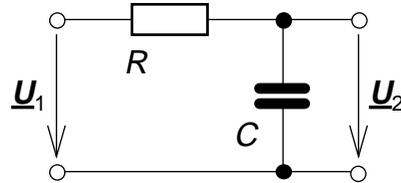
$$C_{komp} \cong \frac{L}{R^2} \text{ für } \omega L \ll R$$

$$\underline{Z}_{ges} = R \left[1 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2 \right] \quad (6-52)$$



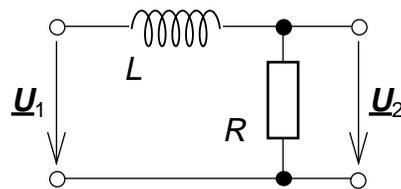
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}_1 \quad (6-53)$$

Ein komplexer Spannungsteiler sei am Beispiel eines RC-Spannungsteilers durchgerechnet. Das Ergebnis ist ein komplexes Verhältnis von Ausgangsspannung und Eingangsspannung, Gl. (6-54). Betragsverhältnis und Phasenbeziehung können mittels Regel 4 (Seite 86) hergeleitet werden.



Der Betrag des Spannungsverhältnisses muß, da es sich um einen Spannungsteiler handelt, immer kleiner als 1 sein. Die Ausgangsspannung eilt der Eingangsspannung nach (negative Phasenwinkeldifferenz), denn die periodische Aufladung und Entladung der Kapazität über den ohmschen Widerstand folgt dem Verlauf der Eingangsspannung nur mit Zeitverzögerung.

Auch für diese Schaltung existiert eine äquivalente Schaltung: der LR-Spannungsteiler. Betragsverhältnis und Phasenbeziehung von \underline{U}_2 und \underline{U}_1 sind identisch mit dem RC-Spannungsteiler, wenn $L/R = C \cdot R$ ist, Gl. (6-55).



Dual verhalten sich beide Spannungsteiler, wenn Wirk- und Blindwiderstand jeweils vertauscht werden, d.h. die Phasendifferenz der Ausgangsspannung wird positiv (voreilend) gegenüber der Eingangsspannung und ω tritt reziprok in allen Termen auf. Dies wird in Abschnitt 7 "Filter" von Bedeutung sein.

$$\underline{Z}_1 = R \quad \underline{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi_{u2} - \varphi_{u1} = -\text{atan}\omega CR \quad (6-54)$$

$$\underline{Z}_1 = j\omega L \quad \underline{Z}_2 = R$$

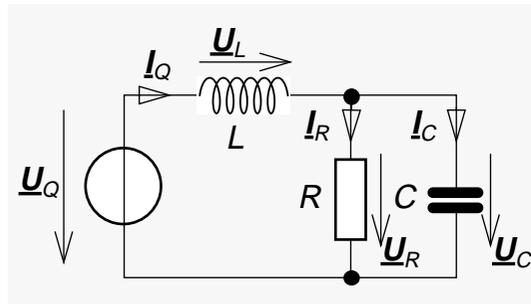
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}} \quad (6-55)$$

6.6 Komplexe Maschengleichung und Knotengleichung

Maschengleichungen und Knotengleichungen gelten selbstverständlich auch in Wechselstromnetzwerken. Zu ihrer Aufstellung kann ebenfalls die komplexe Wechselstromrechnung angewandt werden. Wir erhalten dann die komplexe Maschengleichungen (6-56) und die komplexe Knotengleichung (6-57).

Zur Aufstellung dieser Gleichungen wird Regel 1 (Seite 85) angewandt. Spannungen und Ströme sind durch das „Ohmsche Gesetz der komplexen Wechselstromrechnung“, Gl. (6-38) auf Seite 88, miteinander verknüpft.

Als Beispiel wird das unten skizzierte RLC-Netzwerk durchgerechnet.



$$-\underline{I}_Q + \underline{I}_R + \underline{I}_C = 0 \quad (6-58)$$

$$-\underline{U}_Q + \underline{U}_L + \underline{U}_R = 0 \quad (6-59)$$

$$\underline{U}_R - \underline{U}_C = 0$$

Das Netzwerk ist durch eine unabhängige Knotengleichung Gl. (6-58) und zwei unabhängige Maschengleichungen Gl. (6-59) sowie drei $\underline{I}/\underline{U}$ -Relationen Gl. (6-60) beschrieben.

In diesem Rechenbeispiel wird das Gleichungssystem nach dem Verhältnis der Spannung am RC-Zweipol zur Quellenspannung $\underline{U}_R/\underline{U}_Q$, Gl. (6-61) aufgelöst.

Dieses spezielle Netzwerk liefert im Gegensatz zu den einfachen RC- und LR-Spannungsteilern auf Seite 96 eine Phasendrehung von exakt -90° bei *endlicher* Ausgangsspannung, wenn $\omega^2=1/LC$ ist.

$$\sum_k \underline{U}_k = 0 \quad \begin{cases} \sum_k \operatorname{Re}(\underline{U}_k) = 0 \\ \sum_k \operatorname{Im}(\underline{U}_k) = 0 \end{cases} \quad (6-56)$$

$$\sum_k \underline{I}_k = 0 \quad \begin{cases} \sum_k \operatorname{Re}(\underline{I}_k) = 0 \\ \sum_k \operatorname{Im}(\underline{I}_k) = 0 \end{cases} \quad (6-57)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_Q$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R \quad (6-60)$$

$$\underline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_C$$

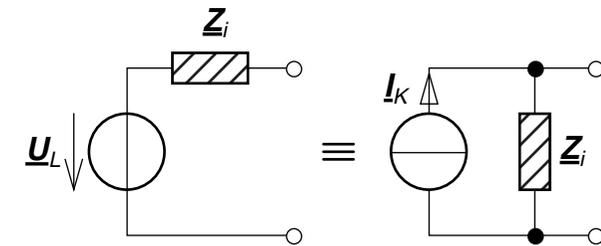
$$\begin{aligned} \underline{U}_Q &= j\omega L(\underline{I}_R + \underline{I}_C) + \underline{U}_R \\ &= j\omega L\left(\frac{1}{R} \cdot \underline{U}_R + j\omega C \cdot \underline{U}_C\right) + \underline{U}_R \\ &= \left[j\omega L\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) + 1\right] \underline{U}_R \\ \underline{U}_R &= \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\frac{\omega L}{R}} \cdot \underline{U}_Q \quad (6-61) \end{aligned}$$

für $\omega^2 LC = 1$ gilt $\underline{U}_R = -jR\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \underline{U}_Q$

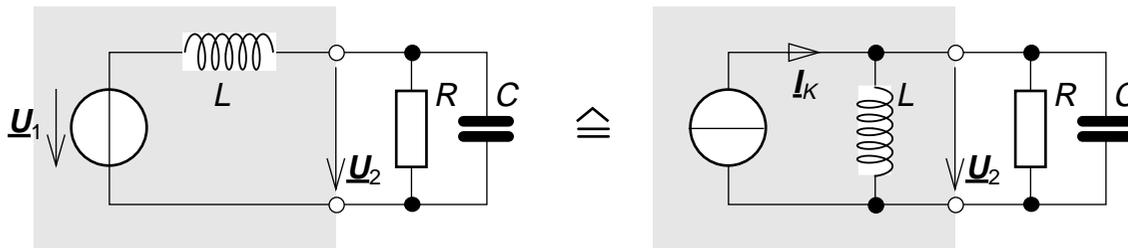
6.7 Komplexe Ersatzquellen

Aus den Methoden der Gleichstromnetzwerke kann auch das Prinzip der *dualen* Quellen (Abschnitt 4.3.6 auf Seite 59) übernommen werden: Einer Spannungsquelle \underline{U}_L mit in Serie geschaltetem komplexem Innenwiderstand \underline{Z}_i ist eine Stromquelle \underline{I}_K mit gleich großem *parallel* geschaltetem komplexen Widerstand \underline{Z}_i gleichwertig, wenn Gl. (6-62) erfüllt ist. Gl. (6-62) ist die komplexe Form von Gl. (4-12) auf Seite 58.

Als Beispiel für die Anwendung dieses Prinzips soll das oben behandelte Netzwerk berechnet werden. Nach Ersetzen der Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $j\omega L$ durch eine äquivalente Stromquelle erscheint deren Innenwiderstand $j\omega L$ als weiterer paralleler Zweipol zur RC-Parallelschaltung. Der Gesamtwiderstand dieser Parallelschaltung kann nun gemäß Gl. (6-46) auf Seite 92 berechnet werden kann, Gl. (6-63).



$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_i} \quad (6-62)$$

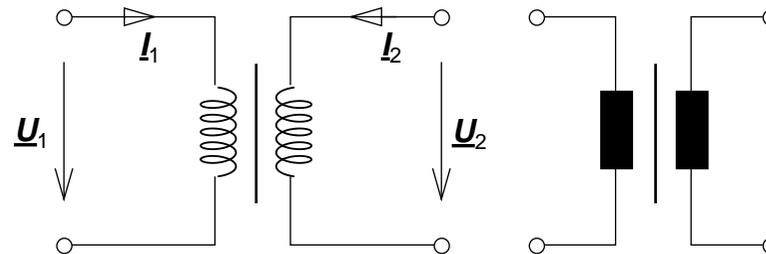
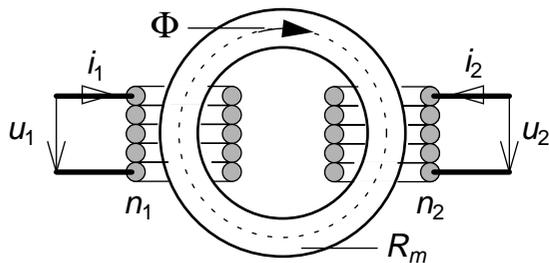
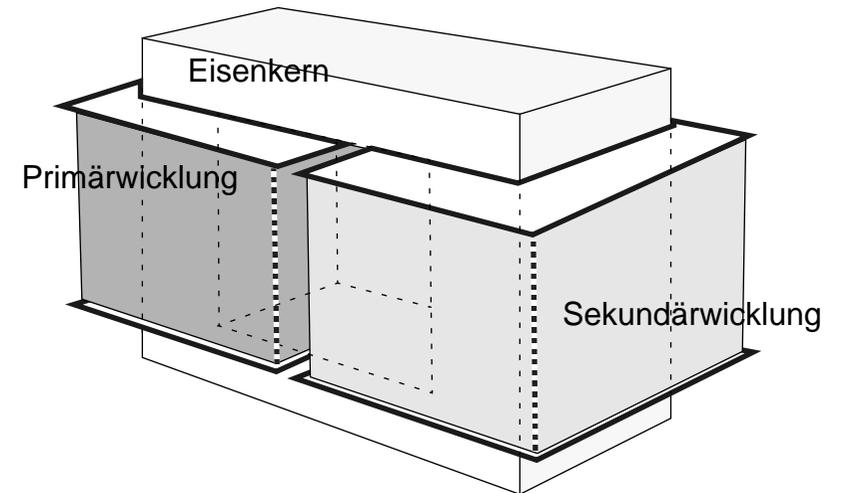


$$\begin{aligned} \underline{I}_K &= \frac{\underline{U}_1}{j\omega L} \\ \frac{1}{\underline{Z}_p} &= \frac{1}{R} + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_K \end{aligned} \quad (6-63)$$

Die an dieser Parallelschaltung herrschende Spannung ist identisch mit \underline{U}_R der Netzwerkberechnung von Seite 97.

6.8 Transformator

In der Wechselstromtechnik finden wir eine ausgesprochen nützliche Anwendung des Prinzips der *verkoppelten Spulen* (Abschnitt 3.6.2 auf Seite 39), den Transformator. Das Induktionsgesetz – Gl. (3–25) auf Seite 35 – ermöglicht die Übertragung elektrischer Energie zwischen zwei galvanisch vollständig getrennten Stromkreisen („galvanisch getrennt“ bedeutet, daß keinerlei leitende Verbindung existiert), indem eine Verkopplung über den magnetischen Fluß hergestellt wird. Das Induktionsgesetz fordert eine stetige *Änderung* des magnetischen Flußes, damit eine stetige Induktionsspannung entsteht. Dies ist gegeben, wenn der magnetische Fluß durch einen Wechselstrom mit harmonischer Schwingungsfunktion erzeugt wird.



6.8.1 Komplexe Behandlung des Transformators

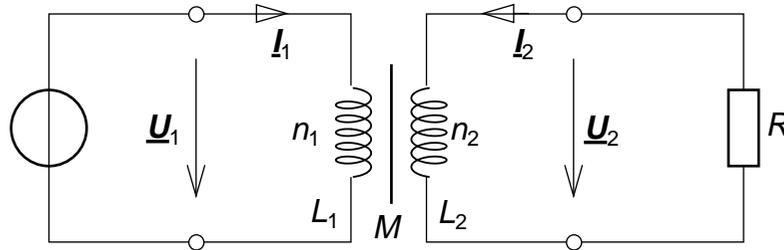
Der Eingang (Primärspule) eines am Ausgang (Sekundärspule) *unbelasteten* Transformators stellt für eine Quelle \underline{U}_1 zunächst eine reine Induktivität L_1 dar, nimmt also nur *Blindleistung* auf: Widerstandslose Spulenwicklung vorausgesetzt ergibt sich der Primärstrom i_1 nach Gl. (3–29) auf Seite 37 bzw nach Gl. (6–64) in komplexer Darstellung \underline{I}_1 .

$$\text{für } R = 0: \quad i_1 = \frac{1}{L_1} \cdot \int u_1 dt$$

$$\underline{I}_1 = -j \frac{1}{\omega L_1} \underline{U}_1 \quad (6-64)$$

An den Ausgangsklemmen erscheint aufgrund der im Idealfall (der im folgenden angenommen wird) vollständigen Flußverkopplung eine induzierte Spannung \underline{U}_2 , die nach Gl. (3–34) auf Seite 39 der Eingangsspannung \underline{U}_1 über das Windungszahlenverhältnis \ddot{u} streng proportional ist, Gl. (6–65). Die Sekundärspule eines primärseitig an eine Wechselspannungsquelle angeschlossenen Transformators stellt also ihrerseits eine Spannungsquelle dar.

Wird an diese nun eine reelle Last (ohmscher Widerstand R , siehe untenstehenden Schaltplan) angeschlossen, dann wird eine *Wirkleistung* geliefert. Der ausgangsseitig belastete Transformator muß am Eingang nun ebenfalls eine Wirkleistung aufnehmen – seine Eingangswicklung kann nicht mehr als reiner Blindwiderstand erscheinen, sondern muß eine entsprechende Wirkkomponente erhalten. Dies wird sofort ersichtlich, wenn wir uns verge-



genwärtigen, daß infolge des ausgangsseitig nun geschlossenen Stromkreises gemäß Gl. (6–66) ein Strom \underline{I}_2 durch die Sekundärwicklung fließt, der seinerseits einen Beitrag zum Gesamtfluß liefert. Durch diesen Flußbeitrag ist wiederum die Primärspannung \underline{U}_1 nicht nur eine Funktion des Primärstroms, sondern erhält über die magnetische Kopplung der beiden Wicklungen einen zusätzlichen, von \underline{I}_2 abhängigen Beitrag. Ausgehend von Gl. (3–35) auf Seite 39 ergibt sich die durch den resultierenden Gesamtfluß primärseitig induzierte Spannung nach Gl. (6–67) (Strom- und Spannungspfeilrichtungen beachten!). Darin ist M die sogenannte Gegeninduktivität, siehe auch Gl. (3–36) und Gl. (3–37) auf Seite 39.

$$\underline{U}_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \underline{U}_1 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_1 \quad (6-65)$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{1}{R} \cdot \underline{U}_2 = -\frac{1}{R} \cdot \ddot{u} \cdot \underline{U}_1 \quad (6-66)$$

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \quad (6-67)$$

$$L_1 = \frac{n_1^2}{R_m} \quad L_2 = \frac{n_2^2}{R_m}$$

$$M = \frac{n_1 \cdot n_2}{R_m} = \ddot{u} \cdot L_1 \quad (6-68)$$

Mit dem Ziel, die Relation zwischen Primärspannung und –strom zu ermitteln, lösen wir Gl. (6–67) nach \underline{I}_1 auf und erhalten unter Zuhilfenahme von Gl. (6–65) und Gl. (6–68) gegenüber dem unbelasteten Fall nach Gl. (6–64) zusätzlich eine *reellen* Term. Gl. (6–69) kann so gedeutet werden, daß sich der Primärstrom in zwei Komponenten – eine reine Blindkomponente wie im unbelasteten Fall und eine belastungsabhängige *Wirkkomponente* – aufteilt.

$$\underline{I}_1 = -\frac{M}{L_1} \cdot \underline{I}_2 - j \frac{1}{\omega L_1} \underline{U}_1 = \frac{M}{L_1} \cdot \frac{1}{R} \cdot \underline{U}_2 - j \frac{1}{\omega L_1} \underline{U}_1$$

$$\underline{I}_1 = \left(\ddot{u}^2 \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L_1} \right) \underline{U}_1 \quad (6-69)$$

6.8.2 Transformation des Verbraucherwiderstandes

Nach Gl. (6–70) stellt der Transformator primärseitig einen komplexen Widerstand dar, der als RL-Parallelschaltung (Seite 93) gedeutet werden kann. Darin erscheinen der Belastungswiderstand R der Sekundärseite um den Faktor \ddot{u}^2 vermindert und, parallel dazu liegend, die Induktivität der Primärspule. Letztere bringt die Mittlerfunktion des magnetischen Feldes im Transformator Kern zum Ausdruck, die den komplexen Widerstand der Primärspule umso stärker beeinflusst, je größer der magnetische Widerstand des magnetischen Zwischenkreises ist. Ist dieser klein (ωL_1 also groß), dann erscheint der Verbraucherwiderstand an den Klemmen der Primärwicklung näherungsweise mit der Spannungsübersetzung *quadratisch untersetzt*.

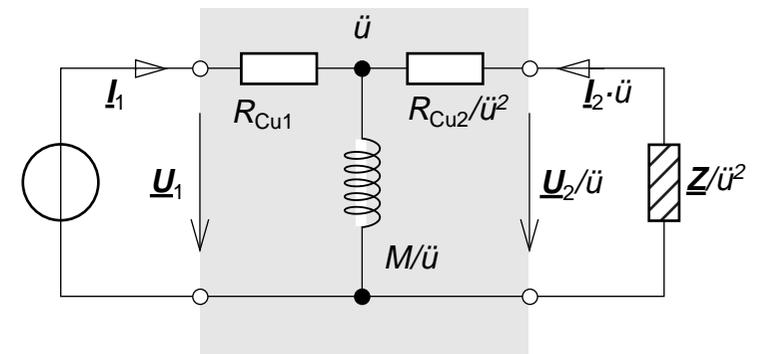
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{prim}}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{\ddot{u}^2}{R} - j \frac{1}{\omega L_1} \quad (6-70)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\underline{Z}_{\text{prim}}}\right) = \frac{\ddot{u}^2}{R} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\underline{Z}_{\text{prim}}}\right) = -\frac{1}{\omega L_1}$$

$$\underline{Z}_{\text{prim}} \cong \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot R \quad \text{wenn } \omega L_1 \gg \frac{R}{\ddot{u}^2}$$

Eine vollständigere Ersatzschaltung des Transformators müßte mindestens die ohmschen Widerstände $R_{\text{Cu}1}$ und $R_{\text{Cu}2}$ der Wicklungen beinhalten. In der nebenstehend skizzierten Ersatzschaltung wird der Effekt der Spannungsübersetzung durch den Faktor \ddot{u} bei allen Strömen, durch den Faktor $1/\ddot{u}$ bei allen Spannungen sowie durch den Faktor $1/\ddot{u}^2$ bei allen Widerständen des sekundärseitigen Netzwerks berücksichtigt.

Transformatoren können also auch dazu dienen, Verbraucher so an Quellen anzupassen, daß optimale Belastungssituationen entstehen. Wenn lange Übertragungswege zu überwinden sind, kann der Einfluß der Leitungswiderstände auf die Leitungsverluste um den Faktor $1/\ddot{u}^2$ (!) vermindert werden, indem die Spannung an der Quelle \ddot{u} -fach übersetzt und am Verbraucher entsprechend wieder herabgesetzt wird.



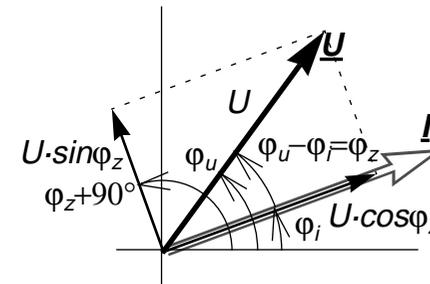
6.9 Komplexe Leistungsberechnung

Die von einem Verbraucherzweipol aufgenommene Leistung war durch Gleichung Gl. (1–13) auf Seite 10 als Produkt von Strom und Spannung definiert. Bei der Betrachtung der Leistung an Induktivität (Seite 79) und Kapazität (Seite 79) wurde bereits deutlich, daß die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom eine ausschlaggebende Rolle spielt. Wenn wir bei einem allgemeinen komplexen Zweipol lediglich das Produkt aus den Effektivwerten U und I bilden, Gl. (6–71), erhalten wir keine Aussage darüber, in welchem Maße sich diese sogenannte *Scheinleistung* S aus Wirkleistung P und Blindleistung Q zusammensetzt.

Eine reine Wirkleistung ergab sich, wenn Spannung und Strom in Phase waren ($\varphi_U - \varphi_I = 0$), Gl. (6–11) auf Seite 77 – eine reine Blindleistung, wenn die Phasendifferenz $\varphi_U - \varphi_I = \pm 90^\circ$ war, Gl. (6–19) auf Seite 79. Bei einer beliebigen Phasendifferenz zwischen Strom \underline{I} und Spannung \underline{U} liegt es daher nahe, \underline{U} in einen Anteil, der in Phase mit \underline{I} ist, und einen Anteil, der \underline{I} um 90° vor- oder nachzieht, aufzuspalten, um Wirk- und Blindleistungskomponente zu ermitteln.

Dies läßt sich unter Anwendung des „Ohmschen Gesetzes der komplexen Wechselstromrechnung“ einfach bewerkstelligen, Gl. (6–72). Danach erhalten wir den in-Phase-Anteil von \underline{U} (Phasenwinkel φ_i) durch das Produkt mit $\cos\varphi_z$, den 90° -Anteil (Phasenwinkel $\varphi_i + 90^\circ$) durch das Produkt mit $\sin\varphi_z$. Sinngemäß sind damit Wirkleistung und Blindleistung nach Gl. (6–73) gegeben. Die Scheinleistung ergibt sich aus der *geometrischen* Summe von Wirkleistung und Blindleistung.

Der Faktor $\cos\varphi_z$ wird, da er die physikalisch umgesetzte Leistung (Wirkleistung) bestimmt, *Leistungsfaktor* genannt; $\sin\varphi_z$ wird als *Blindfaktor* bezeichnet. Leistungsfaktor und Blindfaktor können aus dem relativen Wirk- bzw. Blindanteil eines komplexen Verbraucherwiderstandes ermittelt werden.



$$p = u \cdot i$$

$$S = U \cdot I$$

$$(6-71)$$

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z} \quad (6-72)$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \varphi_z$$

$$U \cdot e^{j\varphi_u} = U \cdot e^{j(\varphi_i + \varphi_z)} = U e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\varphi_z}$$

$$= U e^{j\varphi_i} \cdot (\cos\varphi_z + j \sin\varphi_z)$$

$$= [U e^{j\varphi_i} \cos\varphi_z] + [U e^{j(\varphi_i + 90^\circ)} \sin\varphi_z]$$

$$\text{mit } j \cdot e^{j\varphi_i} = e^{j90^\circ} \cdot e^{j\varphi_i} = e^{j(\varphi_i + 90^\circ)}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi_z = I^2 \cdot \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad (6-73)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi_z = I^2 \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z})$$

$$S = U \cdot I = I^2 \cdot Z = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos\varphi_z = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{Z} \quad \sin\varphi_z = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{Z}$$

Hier stellt sich die Frage, ob nicht allein die Wirkleistung von Interesse sei, da diese allein die physikalische Leistung angibt, die umgesetzt oder transportiert wird. Die Abrechnung zugeliieferter elektrischer Energie erfolgt deshalb auch aufgrund einer Integration der *Wirkleistung* (Elektrizitätszähler) beim Verbraucher. Fairerweise wird dabei die Verlustleistung in den Übertragungskabeln nicht erfaßt. Für die Verlustleistung ist es jedoch unerheblich, ob Strom und Spannung beim Verbraucher in Phase sind. Die Verlustleistung ist vom Strom und von der Summe aus Kabelwiderständen und Innenwiderstand des Generators abhängig. Folglich entstehen Verluste P_V (Wirkleistung!) auch, wenn ein Verbraucher lediglich Blindleistung abnimmt.

Nebestehende Rechnung Gl. (6-74) macht deutlich, wie die Verlustleistung P_V durch einen Blindleistungsanteil Q des Verbrauchers zunimmt, ohne daß dem Verbraucher zusätzlich Wirkleistung zugeführt wird: Ein Verbraucher, der die Wirkleistung P aufnimmt, verursacht eine quadratisch mit seiner Blindleistungsaufnahme zunehmende Verlustleistung in der Quelle und in den Übertragungseinrichtungen!

(Alle Größen in Gl. (6-74) sind auf den Verbraucher bezogen.)

Bei Großverbrauchern wird daher auch die Blindleistung gezählt und verrechnet. Dies soll Großverbraucher motivieren, ihre Blindleistungsaufnahme – z.B. durch Blindwiderstandskompensation, siehe Seite 95 – zu reduzieren, um die Verluste in den Versorgungskabeln und Umspanneinrichtungen zu minimieren.

$$P_V = I^2 \cdot R_V \quad (6-74)$$

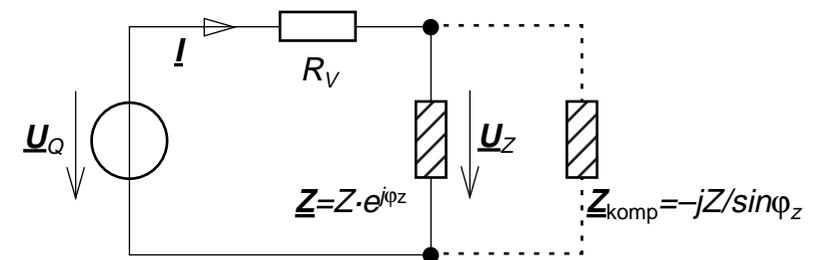
$$I = \frac{S}{U_Z}$$

$$S = \frac{P}{\cos\varphi_Z}$$

$$P_V|_{\varphi_Z=0} = \frac{P^2}{U_Z^2} \cdot R_V$$

$$P_V|_{\varphi_Z \neq 0} = \frac{P^2}{\cos^2\varphi_Z \cdot U_Z^2} \cdot R_V$$

$$\frac{P_V|_{\varphi_Z \neq 0}}{P_V|_{\varphi_Z=0}} = \frac{1}{\cos^2\varphi_Z} = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$



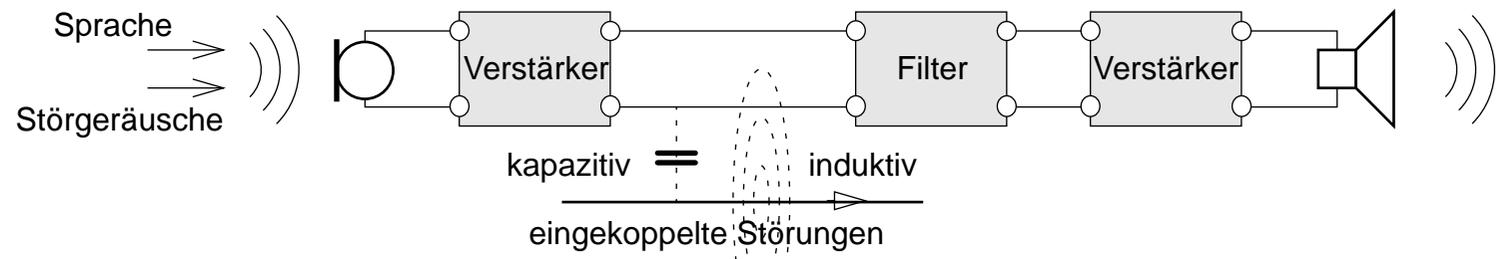
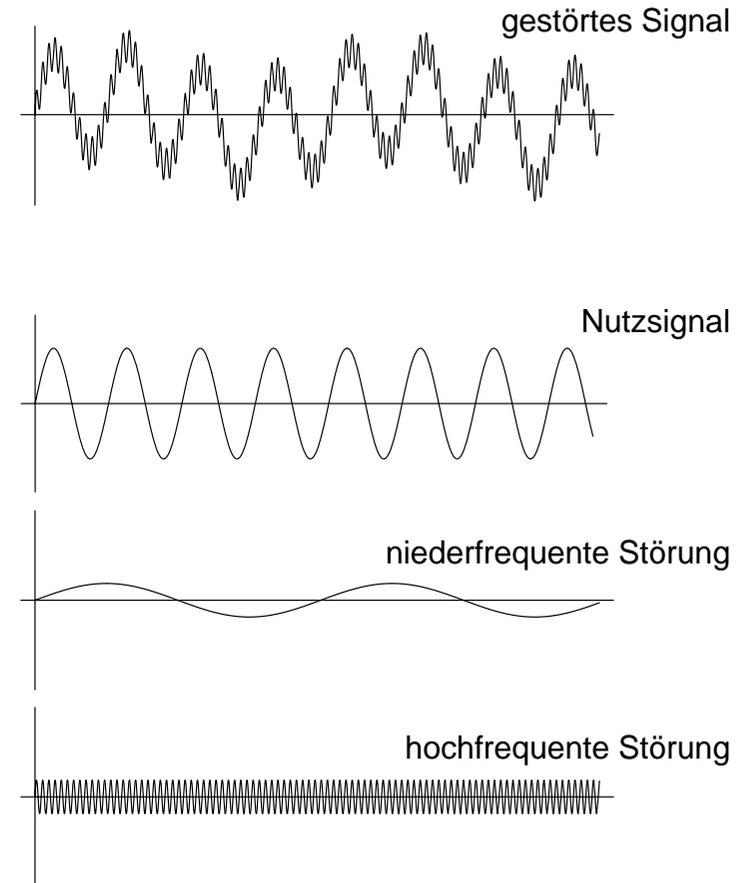
Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt ab Seite 164

7 Netzwerke für die Signalverarbeitung

Bei Blindwiderständen, d.h. Zweipolen mit Speicherverhalten (L und C), ist das Verhältnis zwischen Strom- und Spannungsamplitude im Gegensatz zu Wirkwiderständen von der Frequenz abhängig. Damit wird es möglich, die Eigenschaften von Netzwerken gezielt frequenzabhängig zu machen. Netzwerke, mit denen Signale (d.h. die Zeitverläufe von Spannungen oder Strömen) unterschiedlicher Frequenz unterschiedlich behandelt werden, werden *Filter* genannt (*das* Filter im technischen Sprachgebrauch). Sie werden für die Signalübertragung und -verarbeitung (Nachrichtentechnik) verwendet, um aus einem Signalgemisch bestimmte Signale hervorzuheben oder zu unterdrücken.

7.1 Filter – wozu?

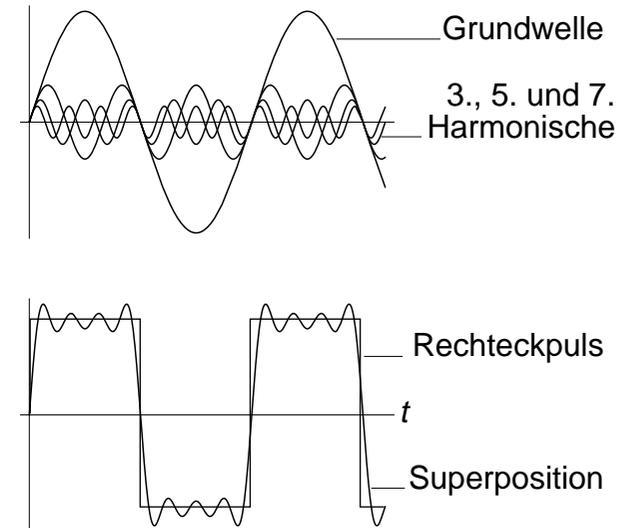
Beispiel: Ein Mikrofon setzt Luftdruckschwankungen in Spannungsschwingungen um. Für die Sprachverständlichkeit sind Tonfrequenzen zwischen 300 und 4000 Hz besonders wichtig und ausreichend. Also unterdrückt man bei der Wiedergabe möglichst alle überlagerten Töne, die nicht in dieses Frequenzband fallen wie Störgeräusche, die ebenfalls vom Mikrofon aufgenommen werden, Störsignale, die auf dem Übertragungsweg durch elektrische oder magnetische Störfelder eingekoppelt werden, thermisches Rauschen der Verstärker (siehe Beispiel auf Seite 113).



Ähnliches gilt für die Übertragung und Verarbeitung von analogen Meßsignalen. Wenn z.B. die Temperatur an einem Maschinenteil mit Hilfe eines temperaturabhängigen Widerstandes gemessen wird, sind nur die langsamen Änderungen der Meßsignale von Interesse. Alle überlagerten schnellveränderlichen Signalanteile sollen dann „ausgeblendet“ werden.

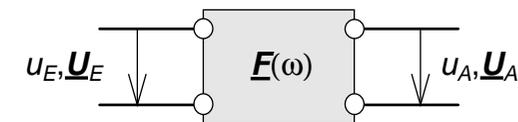
7.2 Frequenzspektrum

Hilfreich ist hierbei die (mathematische) Transformation der Darstellung eines zeitveränderlichen Signals in die Darstellung seines *Frequenzspektrums*: Mittels der *Fourierreihenentwicklung* kann eine beliebige periodisch zeitabhängige Funktion in eine Reihe harmonischer Schwingungen – Grundwelle $\sin \omega_0$, $\cos \omega_0$ und Oberwellen $\sin n\omega_0$, $\cos n\omega_0$ – entwickelt werden. So ergibt ein Rechteck-Impulssignal der Frequenz ω_0 beispielsweise ein Spektrum, das aus der Grundwelle $\sin \omega_0$ und den Oberwellen $\sin (2n-1)\omega_0$ besteht, deren Amplituden reziprok zu ihrer Frequenz sind. Die Superposition aller *Spektralkomponenten* $n=1\dots\infty$ ergibt wieder das ursprüngliche Signal (in nebenstehendem Diagramm sind lediglich die Komponenten $n=1\dots 4$ überlagert). Auch nichtperiodische Signale können als Frequenzspektren repräsentiert werden, die in diesem Fall kontinuierlich sind (Fouriertransformation). Auf der Signaldarstellung im *Frequenzbereich* fußt der Entwurf von Filtern.



7.3 Übertragungsfunktion

Signalübertragungs- und -verarbeitungssysteme sind häufig als eine Kette von Gliedern aufgebaut, deren jedes einzelne Glied eine einfache und überschaubare *Übertragungsfunktion* besitzt. Die Übertragungsfunktion ist als Funktion der Ausgangsspannung u_A von der Eingangsspannung u_E definiert, Gl. (7-1). Um die Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion



$$u_A(t) = f\{u_E(t)\} \quad (7-1)$$

auszudrücken, bietet sich die komplexe Darstellung der Wechselspannungen an, Gl. (7-2). Damit wird aus der Übertragungsfunktion ein *komplexer Faktor* $\underline{F}(\omega)$, Gl. (7-3), der sogenannte Übertragungsfaktor: Das Übertragungsglied produziert eine Ausgangsspannung, deren Effektivwert U_A über den Betrag des Übertragungsfaktors F mit dem Effektivwert der Eingangsspannung U_E verknüpft ist, Gl. (7-4), und die um den Phasenwinkel $\varphi_{F(\omega)}$ des Übertragungsfaktors gegenüber der Eingangsspannung verschoben ist, Gl. (7-5).

Die komplexe Darstellung gilt ausschließlich für Spannungen mit striktem Cosinusverlauf. Ist dies nicht gegeben, muß das Signal in seine Spektralkomponenten zerlegt und die komplexe Übertragungsfunktion für jede einzelne Komponente ermittelt werden. Der komplexe Übertragungsfaktor wird damit selbst zu einer Funktion der Frequenz. Da in einem *linearen* System der Superpositionssatz gilt, kann das Ausgangssignal wieder additiv aus den (frequenzabhängig) übertragenen Spektralkomponenten des Eingangssignals zusammengesetzt werden.

Bei einer Kaskadierung von Übertragungsgliedern errechnet sich der Gesamtübertragungsfaktor aus dem Produkt der einzelnen komplexen Übertragungsfaktoren, Gl. (7-6). Aufgelöst in Betrag und Phase ergibt sich für den Betrag des resultierenden Übertragungsfaktors das Produkt der Beträge aller einzelnen Übertragungsfaktoren, für die Phase die Summe der einzelnen Phasenverschiebungen. Allgemein gilt Gl. (7-7) für eine beliebige Anzahl i kaskadierter Übertragungsglieder.

Übertragungsglieder, die als Netzwerke aus ausschließlich passiven Zweipolen aufgebaut sind, können durch Trennverstärker (z.B. Spannungsfolger, siehe Seite 72) voneinander entkoppelt sein, um eine gegenseitige Beeinflussung ihrer Übertragungsfaktoren zu unterbinden. Diese Maßnahme wollen wir im folgenden voraussetzen, wenn kaskadierte Übertragungsglieder behandelt werden.

Der Entwurf von Filternetzwerken setzt die Beschreibung der Frequenzabhängigkeit von \underline{F} voraus. Sie steckt bereits in dem komplexen Ausdruck für

$$\underline{U}_A(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot \underline{U}_E(\omega) \quad (7-2)$$

$$\underline{F}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{j\varphi_F(\omega)} \quad (7-3)$$

$$U_A(\omega) = F(\omega) \cdot U_E(\omega) \quad (7-4)$$

$$\varphi_A(\omega) = \varphi_E(\omega) + \varphi_F(\omega) \quad (7-5)$$



$$\underline{U}_{A1} = \underline{F}_1 \cdot \underline{U}_{E1} \quad \underline{U}_{A2} = \underline{F}_2 \cdot \underline{U}_{E2}$$

$$\underline{U}_{E2} = \underline{U}_{A1}$$

$$\underline{U}_{A2} = (\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2) \cdot \underline{U}_{E1} \quad U_{A2} = (F_1 \cdot F_2) \cdot U_{E1}$$

$$\varphi_{A2} = \varphi_{E1} + (\varphi_{F1} + \varphi_{F2}) \quad (7-6)$$

$$\underline{F} = \prod_i \underline{F}_i \quad F = \prod_i F_i$$

$$\varphi_F = \sum_i \varphi_{Fi} \quad (7-7)$$

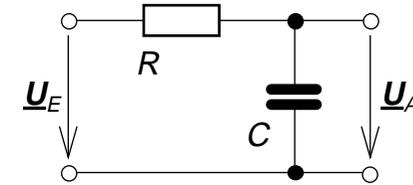
\underline{F} in dem $\omega=2\pi f$ ein Parameter ist, der sowohl die Amplitudenrelation als auch die Phasenrelation bestimmt. Jedoch sind graphische Darstellungen hilfreich für das Verständnis und das intuitive Arbeiten mit Filtern.

7.4 Ortskurve

Eine Möglichkeit, die Frequenzabhängigkeit eines Netzwerkes zu beschreiben, besteht darin, die Zeigerspitze von \underline{F} in der komplexen Ebene zu verfolgen, wenn ω den Bereich aller möglichen Frequenzen von 0 bis ∞ durchläuft. Der Weg, den die Zeigerspitze dabei beschreibt, wird *Ortskurve* genannt.

Als Beispiel wird das RC-Netzwerk von Seite 96 aufgegriffen. Der komplexe Übertragungsfaktor nach Gl. (7-8) wurde bereits in Gl. (6-54) entwickelt (zur Definition der *Zeitkonstante* τ siehe Seite 21).

Die Ortskurve dieses Netzwerkes ist ein Halbkreis mit dem Radius 0,5 und dem Mittelpunkt (0,5 | 0), der von (1 | 0) nach (0 | 0) im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, wenn ω von 0 nach ∞ läuft. Die nebenstehende Tabelle gibt die Lage einiger charakteristischer Punkte auf der Ortskurve und die dazu korrespondierenden Zeigerwerte an.

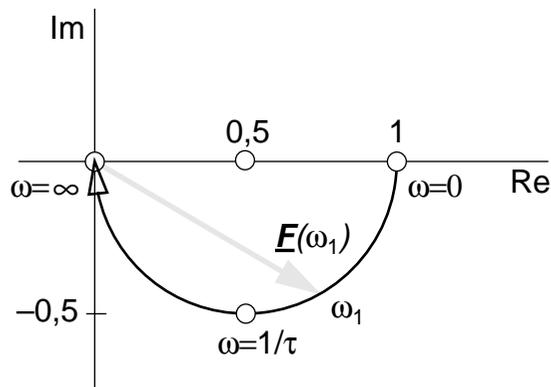


$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (7-8)$$

$$\tau = C \cdot R$$

$$\text{Re}(\underline{F}) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \quad F = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\text{Im}(\underline{F}) = -\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \varphi_F = -\text{atan}\omega\tau$$



ω	$\text{Re}(\underline{F})$	$\text{Im}(\underline{F})$	F	φ_F
0	1	0	1	0°
1/τ	0,5	-0,5	1/√2	-45°
∞	0	0	0	-90°

7.5 Frequenzgang

Die komplexe Ortskurve ist zwar eine kompakte, vollständige Beschreibung von $\underline{F}(\omega)$, aus der die technisch wichtigen Größen Betrag und Phase für jede Frequenz entnommen werden können. Da der Parameter ω auf der Ortskurve jedoch im allgemeinen nichtlinear aufgetragen ist, ist die Frequenzabhängigkeit wenig übersichtlich. Alternativ ist es oft praktischer, Betrag und Phase separat über der Frequenz darzustellen. Diese Darstellung nennen wir *Frequenzgang*.

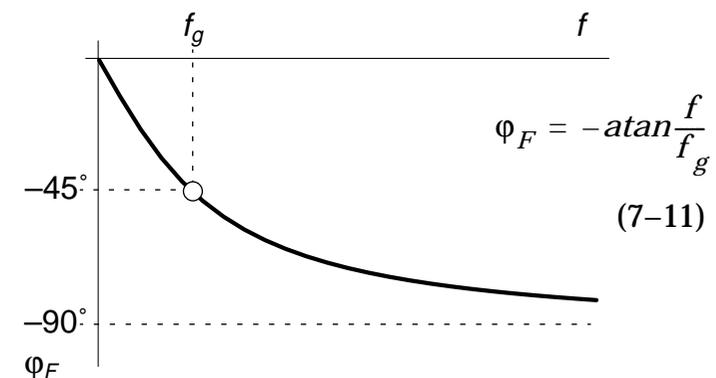
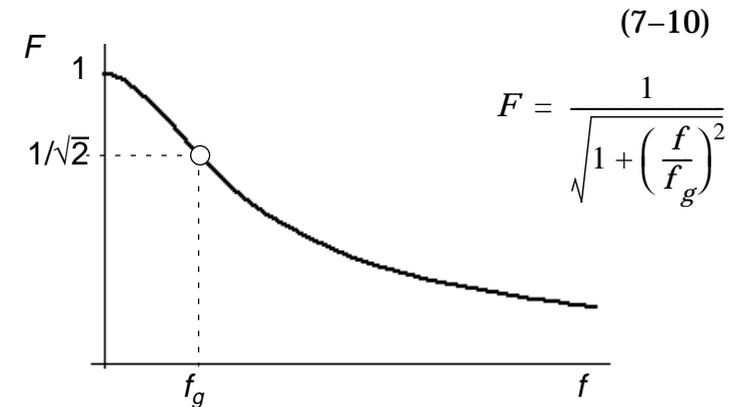
Zur Darstellung von Frequenzgängen wird statt der Kreisfrequenz ω die technisch besser zu interpretierende Größe $f = \omega/2\pi$, siehe Gl. (6-4) auf Seite 74, gewählt. Für die charakteristische Frequenz $\omega = 1/\tau$ wird die Bezeichnung *Grenzfrequenz* f_g nach Gl. (7-9) eingeführt. Die vollständige Beschreibung besteht dann aus dem Betragsfrequenzgang $F(f)$ nach Gl. (7-10) und dem Phasenfrequenzgang $\varphi_F(f)$ nach Gl. (7-11).

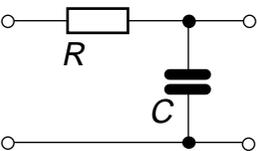
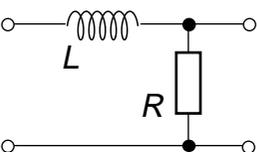
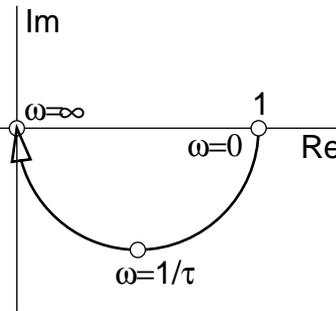
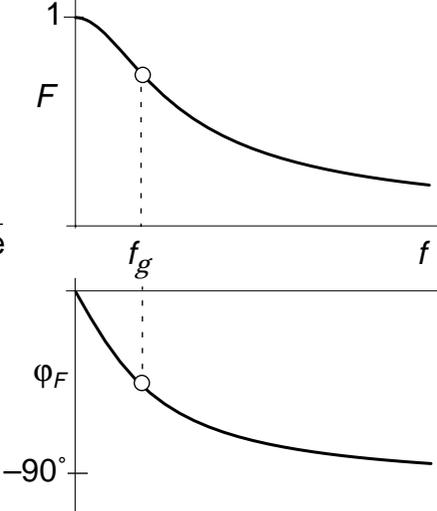
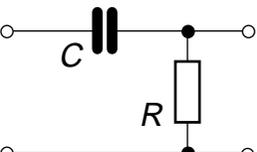
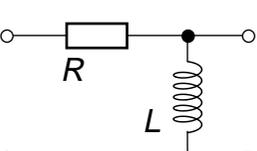
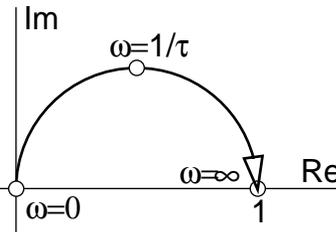
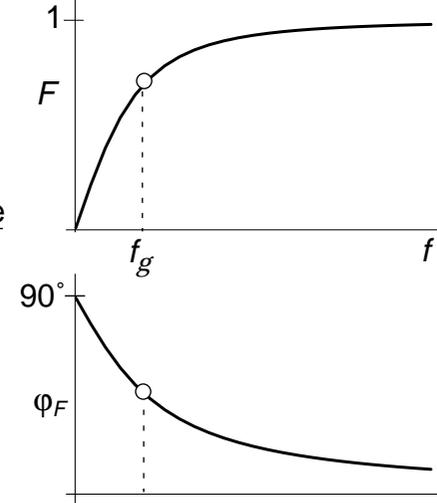
Als Beispiel betrachten wir die Betrags- und Phasenfrequenzgänge des auf Seite 108 behandelten RC-Netzwerkes.

Der Betragsfrequenzgang dieses Netzwerkes läuft mit zunehmender Frequenz asymptotisch gegen Null. Signale (oder deren Spektralkomponenten) mit niedriger Frequenz passieren also nahezu ungedämpft, während Signale höherer Frequenz zunehmend unterdrückt werden. Ein Filter dieser Art bezeichnen wir als *Tiefpaßfilter*. Der Phasenwinkel ist negativ und läuft, bei 0° beginnend, mit zunehmender Frequenz asymptotisch gegen -90° . Das Ausgangssignal eilt also dem Eingangssignal nach. Charakteristisch für RC- und RL-Filter dieser Struktur ist, daß F bei f_g auf $1/\sqrt{2}$ abgefallen ist und φ_F den halben Endwert erreicht hat (siehe Tabelle auf Seite 108).

In der folgenden schematischen Übersicht werden die vier Grundtypen von RC- bzw. RL-Filtern zusammengestellt. Paarweise stellen sie *Tiefpaß*- bzw. *Hochpaß*filter (Unterdrückung niederfrequenter Signale) dar. Der Übertragungsfaktor für ein RL-Filter wurde in Gl. (6-55) auf Seite 96 hergeleitet.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad f_g = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (7-9)$$



<p>Tiefpaßfilter</p>  $\tau = C \cdot R$ $f_g = \frac{1}{2\pi CR}$  $\tau = \frac{L}{R}$ $f_g = \frac{R}{2\pi L}$	$\underline{F} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ $F = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2}}$ $\varphi_F = -\operatorname{atan}\omega\tau = -\operatorname{atan}\frac{f}{f_g}$	 
<p>Hochpaßfilter</p>  $\tau = C \cdot R$ $f_g = \frac{1}{2\pi CR}$  $\tau = \frac{L}{R}$ $f_g = \frac{R}{2\pi L}$	$\underline{F} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}$ $F = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_g}{f}\right)^2}}$ $\varphi_F = \operatorname{atan}\frac{1}{\omega\tau} = \operatorname{atan}\frac{f_g}{f}$	 

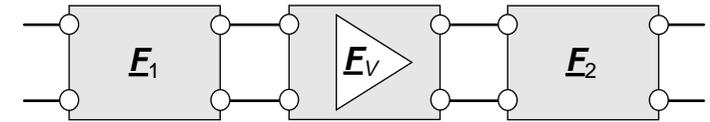
7.6 Kaskadierung von Filtern

Wie schon oben erwähnt, wird die gewünschte Filterwirkung oft erst durch komplizierte Netzwerke erreicht. Sehr übersichtlich wird der Filterentwurf, wenn Filter, die für sich einfach berechenbar sind (z.B. die oben behandelten Grundschaltungen), kaskadiert werden. In einer solchen Kaskade wirkt die Ausgangsspannung eines Filters als Eingangsspannung des nachfolgenden Filters. Entkopplungsverstärker ($F_V=1$) zwischen den einzelnen Filter sorgen dafür, daß die einzelnen Filterschaltungen sich nicht gegenseitig in ihren Eigenschaften beeinflussen.

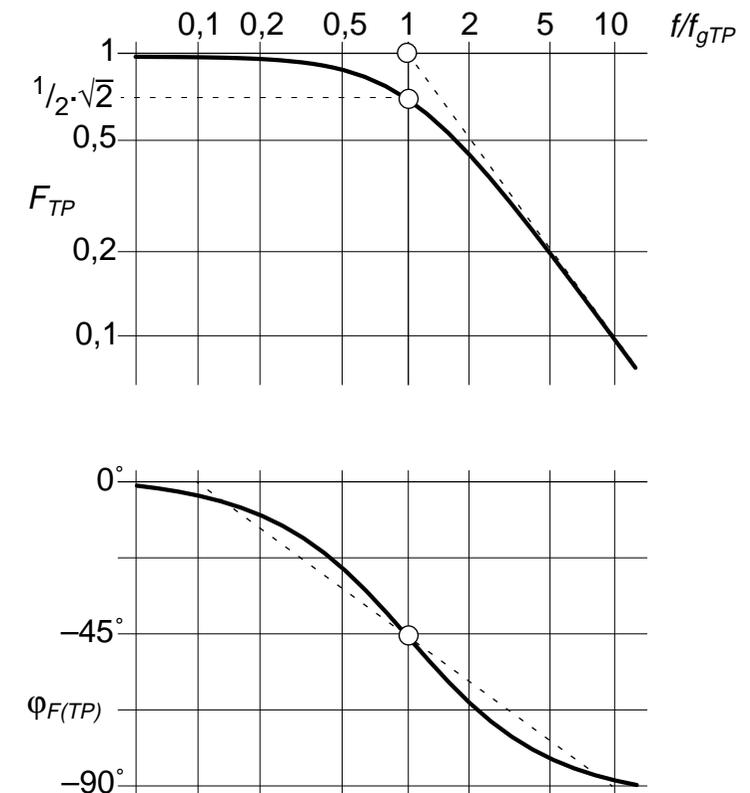
Der Gesamtübertragungsfaktor F_{ges} ergibt sich wie auf Seite 107 hergeleitet durch Multiplikation der einzelnen Übertragungsfaktoren, siehe Gl. (7-6). Der Betrag ist dabei das *Produkt* der einzelnen Beträge, der Phasenwinkel die *Summe* der einzelnen Phasenwinkel, allgemein siehe Gl. (7-7).

7.6.1 Das Bode-Diagramm

Eine einfache grafische Methode zur Herleitung des Frequenzgangs eines kaskadierten Filters aus den Frequenzgängen der Einzelfilter ergibt sich, wenn der Betragsfrequenzgang *doppelt logarithmisch* und der Phasenfrequenzgang *einfach logarithmisch* dargestellt werden (die Frequenzachse wurde hier auf f_g normiert). Nebenstehenden sind Betrags- und Phasenfrequenzgang des auf Seite 108 behandelten Tiefpaßfilters als *Bode-Diagramm* logarithmisch dargestellt. Für die asymptotischen Verläufe der Betragsfrequenzgänge ergeben sich Geraden mit der Steigung 1 für Frequenzgänge $F \sim f$ (Hochpaßfilter, $f \gg f_g$) und -1 für Frequenzgänge $F \sim 1/f$ (Tiefpaß, $f \gg f_g$), die die Frequenzachse bei 1 bzw. $f=f_g$ schneiden. Der Phasenfrequenzgang wird näherungsweise durch eine Gerade mit der Steigung $-45^\circ/\text{Frequenzdekade}$ beschrieben. Die Betragsfrequenzgänge von Hochpaß- und Tiefpaßfilter sind zueinander spiegelsymmetrisch zur Ordinate in 1 bzw. $f=f_g$. Die Phasenfrequenzgänge sind – abgesehen von einer Verschiebung um 90° – identisch.



$$\underline{F}_{\text{ges}} = \prod_i \underline{F}_i \quad F_{\text{ges}} = \prod_i F_i \quad \varphi_{F_{\text{ges}}} = \sum_i \varphi_{F_i}$$



Für den logarithmischen (Betrags-)Übertragungsfaktor ist die Dimension *Dezibel* (dB) festgelegt. Die Angabe eines Übertragungsfaktors in dB ist das 20-fache des Logarithmus zur Basis 10 von F . In nebenstehender Tabelle sind einige Beispiele für die Umrechnung in dB gegeben.

F	$20 \cdot \lg F$
1	0 dB
10	20 dB
100	40 dB
0,1	-20 dB
1/2	-6 dB
$1/\sqrt{2}$	-3 dB

Durch die Logarithmierung der Frequenzachse wird aus der Multiplikation eine Addition, die grafisch einfach auszuführen ist. Eine Veränderung von f_g wirkt sich nun lediglich als lineare Verschiebung auf der Frequenzachse aus. Sowohl die Betragsfrequenzgänge als auch die Phasenfrequenzgänge kaskadierter Filter können einfach grafisch addiert werden, um die Frequenzgänge von Filterketten zu ermitteln.

Ein frequenzunabhängiger Übertragungsfaktor $F \neq 1$ (Verstärker oder Spannungsteiler) verschiebt den Betragsfrequenzgang in vertikaler Richtung.

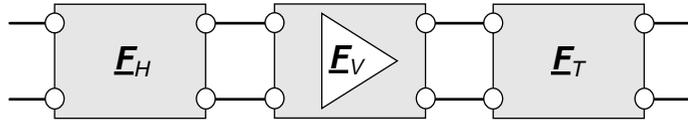
7.6.2 Beispiel: Bandpaßfilter

Der Umgang mit dem Bode-Diagramm soll am Beispiel der Kaskadierung eines Hochpaßfilters mit $f_{gHP}=500\text{Hz}$ und eines Tiefpaßfilters mit $f_{gTP}=2\text{kHz}$ mit zwischengeschalteter Verstärkerstufe $F_V=2$ gezeigt werden. Im Frequenzbereich $f_{gHP} < f < f_{gTP}$ ist der Übertragungsfaktor annähernd unabhängig von der Frequenz. Unterhalb f_{gHP} und oberhalb f_{gTP} fällt er jeweils ab. Sehr tieffrequente und sehr hochfrequente Signalanteile werden also unterdrückt. Durchgelassen wird lediglich ein Frequenzband. Wir sprechen daher in diesem Fall von einem *Bandpaßfilter*.

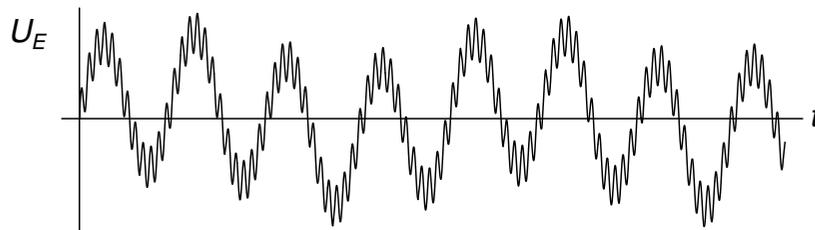
Werden die Betragsfrequenzgänge wie in dem im folgenden skizzierten Beispiel vereinfacht durch ihre Asymptoten repräsentiert, muß beachtet werden, daß die tatsächlichen Verläufe an ihren Eckpunkten (f_{gHP} f_{gTP}) jeweils um -3dB , entsprechend $1/\sqrt{2}$ abweichen.

Die Anwendung auf das Signalspektrum von Seite 105 demonstriert die Wirkung dieses Bandpaßfilters.

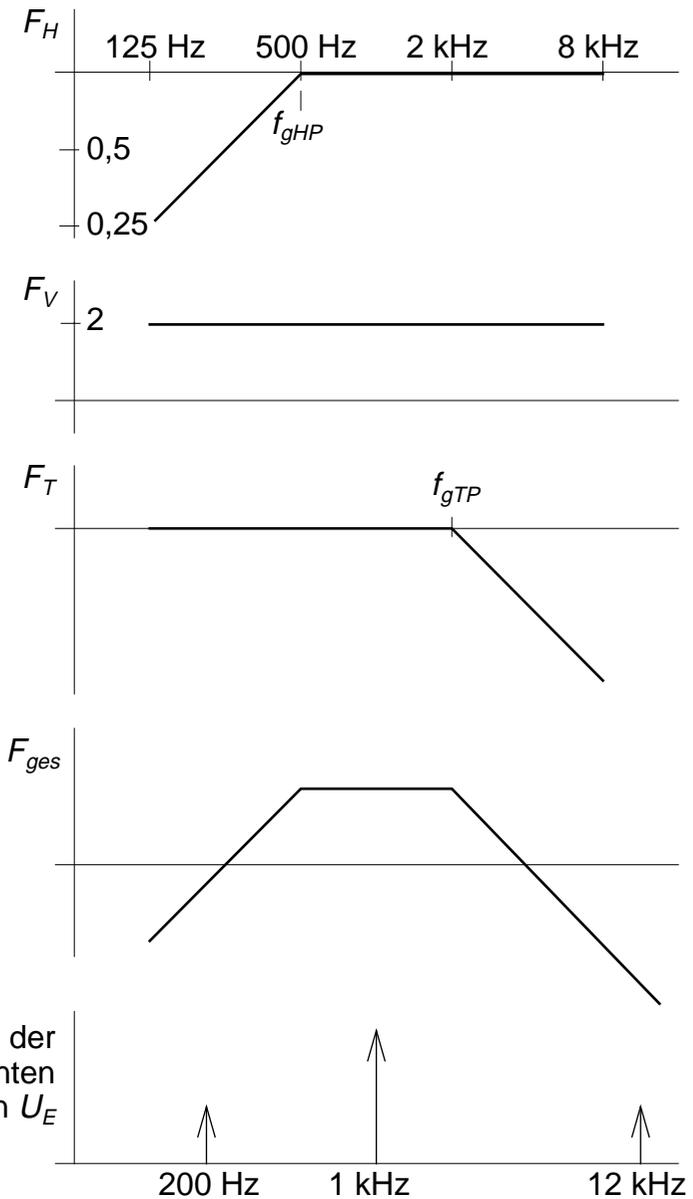
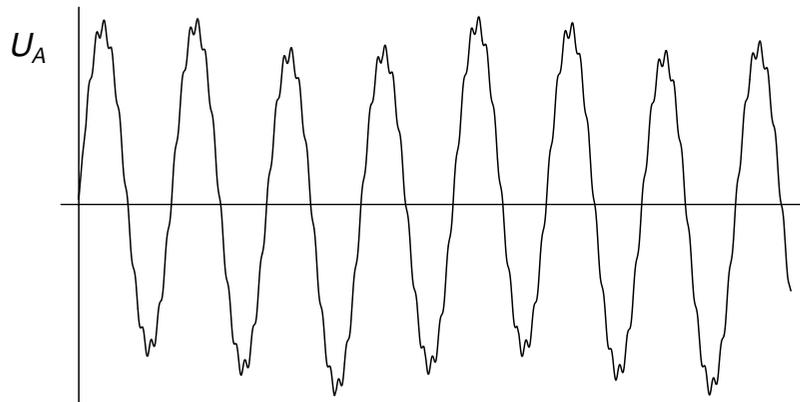
Filterkette aus Hochpaßfilter, Verstärker und Tiefpaßfilter



Eingangssignal der Filterkette



Ausgangssignal der Filterkette



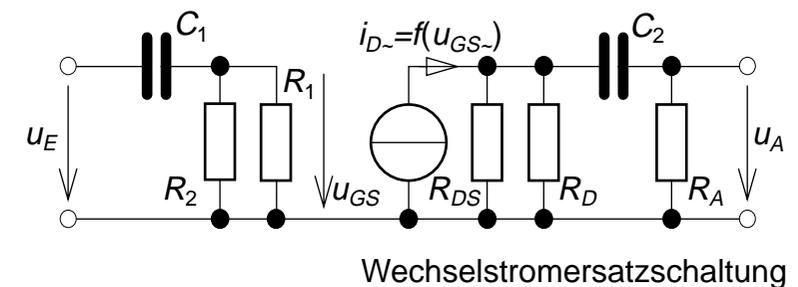
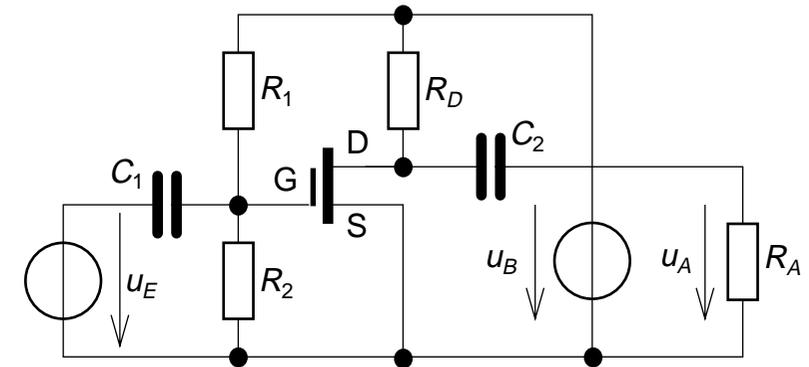
7.7 Wechselspannungsverstärker

Wir greifen hier noch einmal die Verstärkerschaltung aus Abschnitt 5.2.2 auf Seite 71 auf. Wie schon dort erwähnt, ist es erforderlich, die für den Betrieb einer solchen Verstärkerstufe erforderlichen Gleichspannungen von den Wechselspannungssignalen zu trennen, wenn lediglich Wechselspannungssignale verstärkt werden sollen (Beispiel Audiotechnik). Dies bewirkt der Entkopplungskondensator C_1 zwischen der Eingangsspannungsquelle und dem Spannungsteiler R_1, R_2 , mit dem der u_{GS} -Arbeitspunkt festgelegt wird. Ein zweiter Entkopplungskondensator C_2 verhindert, daß über den Ausgangswiderstand R_A ein Gleichstrom fließt.

Auf diese Weise können Verstärkerstufen auch kaskadiert werden, um höhere Spannungsverstärkungsfaktoren zu erreichen oder um die invertierende Wirkung einer einzelnen Stufe aufzuheben.

Die Kombinationen von Kapazitäten und ohmschen Widerständen am Eingang und am Ausgang der Verstärkerstufe wirken jeweils als Filter – hier in beiden Fällen als Hochpaßfilter. Durch entsprechende Dimensionierung wird das gewünschte Signalübertragungsverhalten erreicht (in diesem Fall die untere Grenzfrequenz des Verstärkers).

Für die Berechnung der Filterfrequenzgänge ist eine Wechselstromersatzschaltung zu entwickeln. Die Betriebsspannungsquelle u_B wird darin zu Null gesetzt (= Kurzschluß für Wechselstrom). Der Wechselstromwiderstand der Gate-Source-Strecke des FET wird als unendlich angenommen. Die Drain-Source-Strecke des FET wird in ihrem Wechselstromverhalten als Stromquelle mit Innenwiderstand R_{DS} modelliert, deren Strom durch die Gate-Source-Spannung u_{GS} gesteuert wird. Die Steuerfunktion wird aus dem Kennlinienfeld des FET (siehe Seite 70) konstruiert.



Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt ab Seite 170

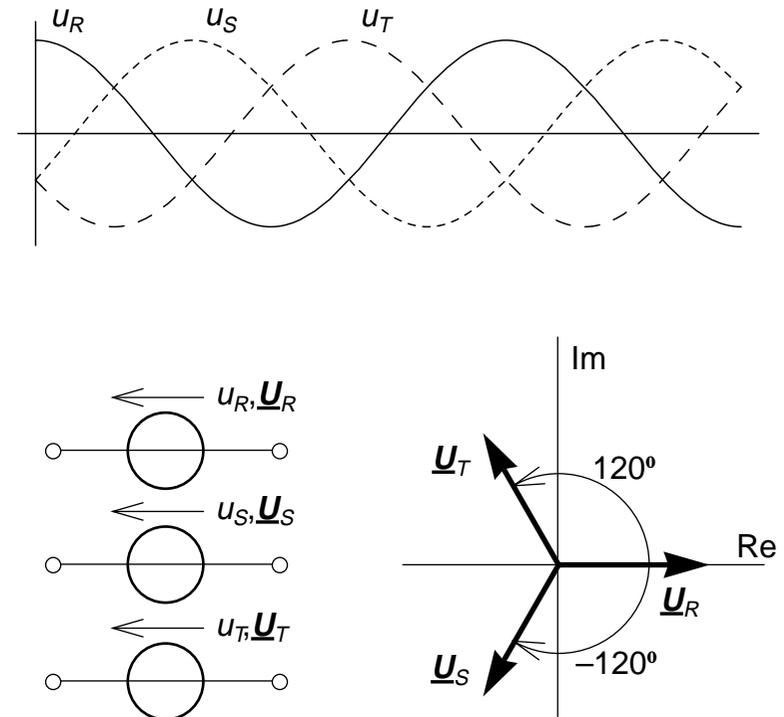
8 Drehstrom

Der wesentliche Vorteil eines Wechselstromsystems zu Energieübertragung liegt in der Möglichkeit, mit Transformatoren verlustarme Spannungsunter-setzungen und sogar Spannungsübersetzungen realisieren zu können: Bei hoher Spannung kann mit entsprechend herabgesetzter Stromstärke eine verlustarme Fernübertragung erreicht werden, wie in Abschnitt 6.8.2 auf Seite 101 gezeigt wurde. Bei niedriger Spannung können beim Verbraucher wiederum hohe Stromstärken realisiert werden.

Die Erzeugung einer Wechselspannung durch Induktion (elektrischer Gene-rator siehe Seite 43) ist sogar einfacher als eine Gleichspannungserzeugung. Statt eines Kommutators zur periodischen Umpolung werden lediglich Schleifringe zur Abnahme der induzierten Spannung im Läufer benötigt. Leider läßt sich die Reziprozität (stromdurchflossener Läufer erfährt im Gleichfeld des Ständers ein Drehmoment) technisch nicht sinnvoll für die Realisierung eines Wechselstrommotors nutzen: Ein solcher Motor würde erstens ein pulsierendes Drehmoment abgeben und zweitens auch nur mit genau der Drehzahl laufen können, die durch die Frequenz der Wechselspan-nung vorgegeben ist (Synchron-drehzahl). Die Einrichtung von *Drehstrom*-netzen schafft die Voraussetzung, diesen Nachteil zu umgehen, wie im folgenden beschrieben wird.

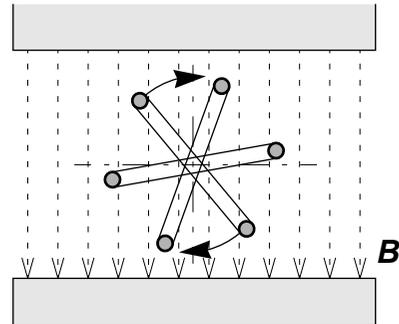
8.1 Das Dreiphasensystem

Drehstromnetze sind Dreiphasensysteme, d.h. die Speisung erfolgt aus drei gleichfrequenten Quellen R, S und T, die jeweils um $\frac{1}{3}$ Periode zeitlich gegeneinander versetzt sind. U_S und U_T weisen gegenüber U_R die (nacheilenden) Phasenwinkel -120° bzw. $-240^\circ = +120^\circ$ auf, Gl. (8-1).



$$\begin{aligned}
 u_R &= \hat{u}_Q \cdot \cos \omega t & \underline{U}_R &= U_Q \\
 u_S &= \hat{u}_Q \cdot \cos (\omega t - 120^\circ) & \underline{U}_S &= U_Q \cdot e^{-j120^\circ} \\
 u_T &= \hat{u}_Q \cdot \cos (\omega t + 120^\circ) & \underline{U}_T &= U_Q \cdot e^{j120^\circ} \\
 U_Q &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \hat{u}_Q & & (8-1)
 \end{aligned}$$

Die Realisierung eines Spannungsquellsystems, das drei unabhängige Spannungen mit identischer Frequenz ω und gleichem Spitzenwert \hat{u} bzw. Effektivwert U erzeugt, kann man sich zunächst folgendermaßen vorstellen: Die auf Seite 43 dargestellte Anordnung einer rotierenden Induktionsschleife im stationären Magnetfeld wird ergänzt durch zwei weitere Induktionsschleifen, die jeweils um 120° gegeneinander versetzt sind.



8.1.1 Leistung im Dreiphasensystem

Entscheidend wird der Vorteil des Dreiphasensystems auf der Verbraucherseite. Zunächst einmal können wir feststellen, daß ein symmetrisches Verbrauchersystem – gleichgroße Verbraucherwiderstände für jede der drei phasenversetzten Spannungen – einen gleichförmigen Energiefluß herstellt, d.h. die Momentanleistung p_{ges} weist keine Pulsation mehr auf, wie die Momentanleistung p in einem einfachen Wechselstromkreis, siehe Gl. (6–9) auf Seite 76. In einem Dreiphasensystem heben sich die Wechselanteile der Momentanleistungen in den drei Stromkreisen infolge ihrer um jeweils 120° versetzten Phasenlagen gegeneinander auf, während sich ihre Mittelwerte p zur Gesamtleistung $p_{\text{ges}} = P_{\text{ges}}$ addieren, Gl. (8–2).

$$p = u \cdot i = \frac{1}{R} \cdot u^2 = \frac{1}{R} \cdot \hat{u}^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$p_{\text{ges}} = \frac{1}{R} \hat{u}^2 \{ \cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t - 120^\circ) + \cos^2(\omega t + 120^\circ) \}$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos(2\omega t + 2\varphi) \}$$

$$\cos(2\omega t + 2\varphi) = \cos 2\omega t \cdot \cos 2\varphi - \sin 2\omega t \cdot \sin 2\varphi$$

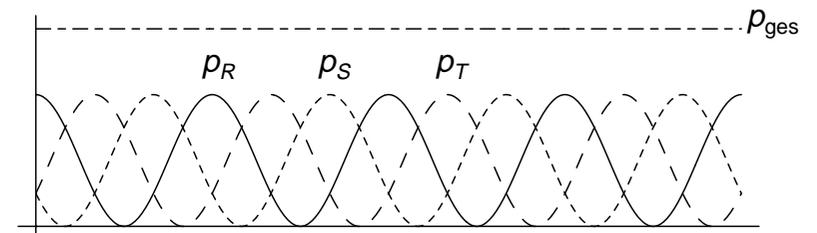
$$\cos 0^\circ = 1 \quad \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} \quad \sin(-120^\circ) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$p_{\text{ges}} = 3 \cdot \frac{\hat{u}^2}{2R}$$

$$P_{\text{ges}} = 3 \cdot \frac{U^2}{R} \quad (8-2)$$



8.2 Drehstrommaschinen

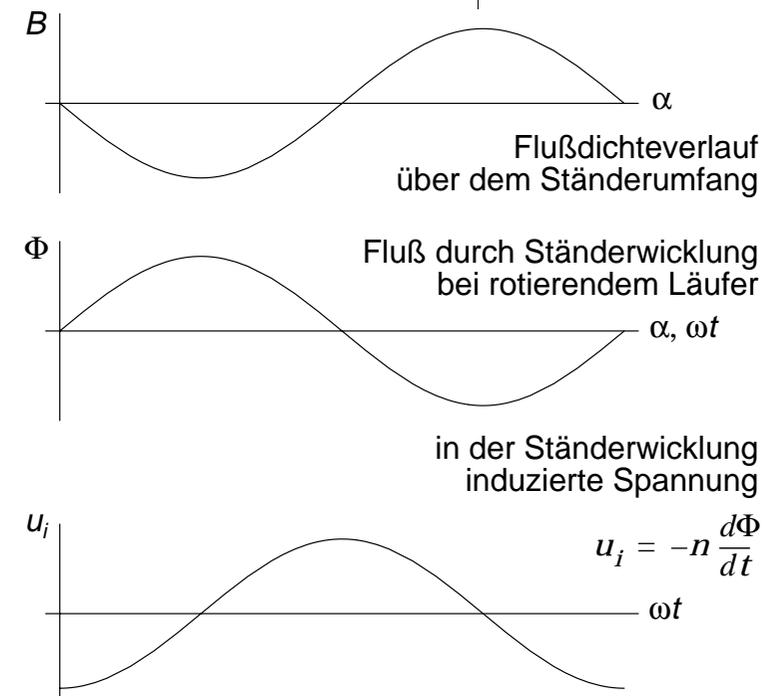
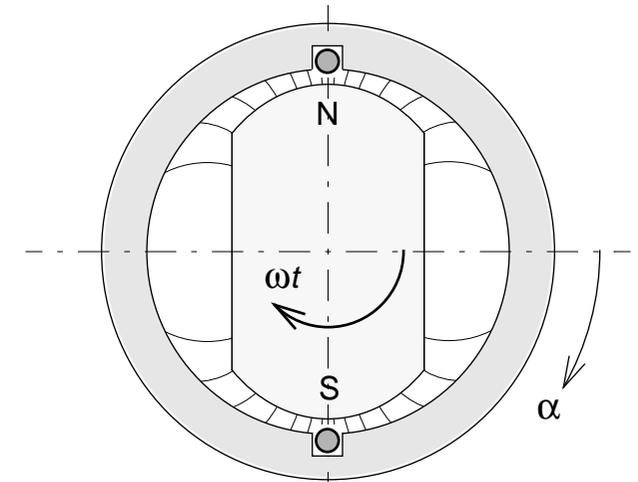
Von größtem Interesse ist es nun, Wechselstrom-Elektromotoren zu realisieren, die diese Eigenschaft von Drehstromsystemen nutzen, um ein nicht pulsierendes Drehmoment zu erzeugen. In einem Dreiphasensystem wird dies möglich über die Erzeugung sogenannter magnetischer *Drehfelder*. Um die Entstehung eines Drehfeldes zu erklären, nehmen wir uns noch einmal das Wechselstrom-Generatorprinzip vor.

8.2.1 Drehstromgenerator

Im Gegensatz zur Skizze auf Seite 116 ist es technisch praktischer, das Erregermagnetfeld rotieren zu lassen und die Induktionsschleifen stationär anzuordnen. Es ist dann nicht mehr nötig, die vom Generator gelieferte elektrische Leistung über Schleifringe zu führen. Statt dessen wird nun (wenn das rotierende Gleichfeld nicht durch einen Permanentmagneten erzeugt wird) lediglich der für den Aufbau des magnetischen Gleichfeldes erforderliche Erregerstrom, der durch eine entsprechende Windungszahl vergleichsweise niedrig sein kann, über Schleifringe geführt.

Den Ständer des Generators bildet ein Hohlzylinder aus hochpermeablem Material. Als Läufer befindet sich in ihm ein ebenfalls hochpermeabler Kern, der entweder permanentmagnetisch ist oder durch eine Erregerwicklung magnetisiert wird. Dieser Kern ist so geformt, daß durch einen sich über dem Winkel ändernden Luftspalt eine magnetische Flußdichte B mit annähernd sinusförmigem Verlauf über dem Umfang entsteht. Die skizzierte Abwicklung des Luftspalts über den Umfangswinkel α läßt eine Flußdichtewelle erkennen. Rotiert der Läufer, dann läuft diese Flußdichtewelle mit der Drehzahl $\omega/2\pi$ um.

Setzen wir nun in die Innenseite des Ständers eine Induktionsschleife ein, dann wird eine cosinusförmige Induktionsspannung erzeugt, denn die fest-

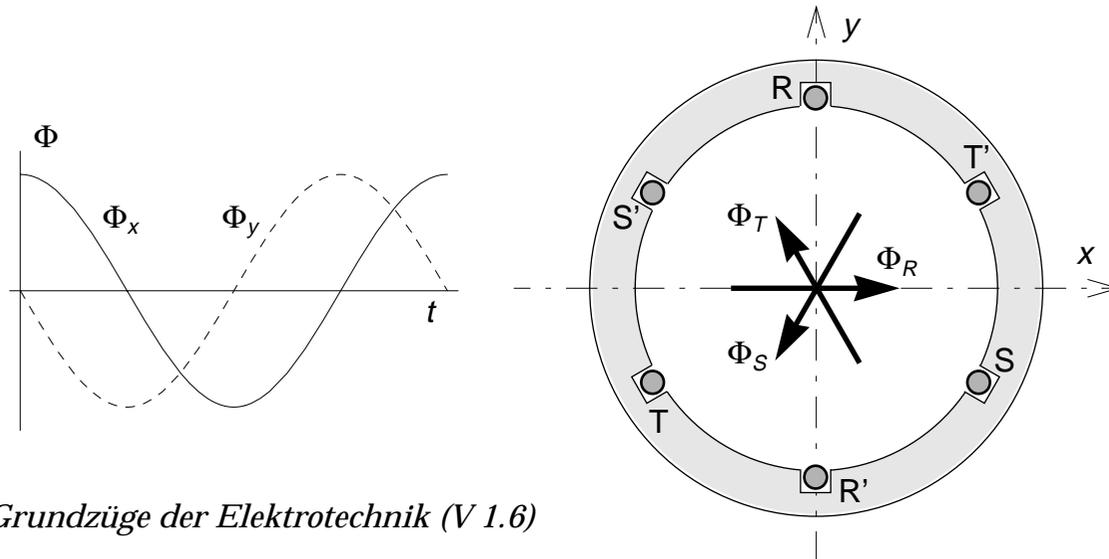
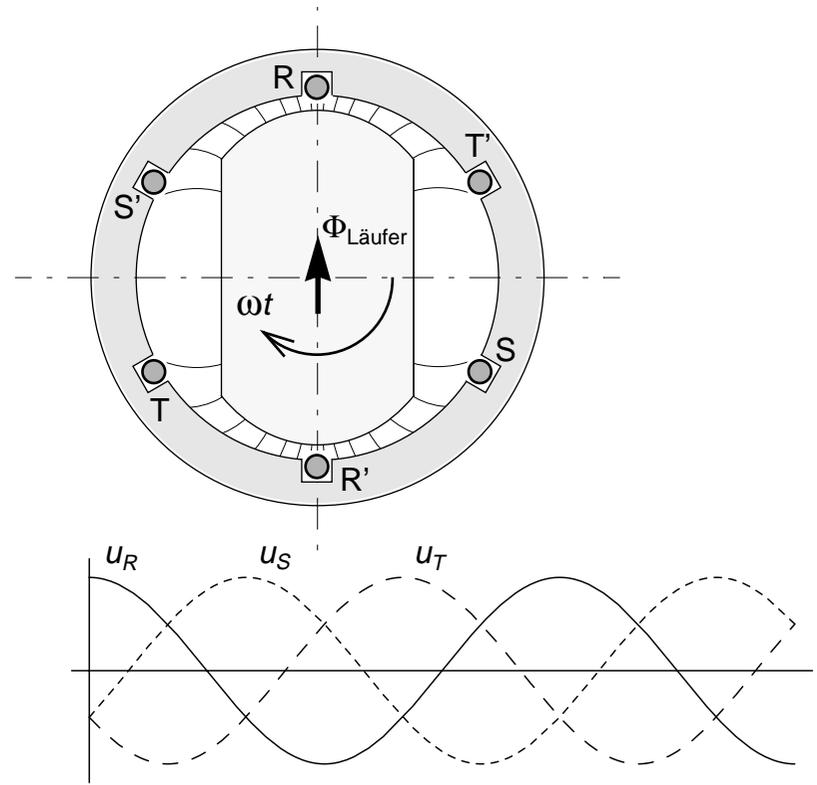


stehende Windung wird von einem sich sinusförmig ändernden Fluß Φ durchsetzt und die induzierte Spannung ist proportional zur zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses, siehe Induktionsgesetz Gl. (3-24) auf Seite 34. Die Frequenz dieser Wechselspannung ist durch die Drehzahl des Läufers fest vorgegeben. Dieser Generatortyp wird daher auch *Synchronegenerator* genannt.

Ergänzt man diese Anordnung durch zwei weitere Induktionsschleifen mit einem Winkelversatz von -120° bzw $+120^\circ$, dann erhält man die drei gemäß Gl. (8-1) auf Seite 115 gewünschten phasenversetzten Spannungen.

8.2.2 Drehfeld-Erzeugung

Nimmt man aus dieser Anordnung den Läufer heraus und speist die drei feststehenden Spulen mit den drei Spannungen eines Dreiphasensystems nach Gl. (8-1), dann überlagern sich nach Gl. (8-3) die mit ω alternierenden und jeweils um $1/3$ Periode zeitlich verschobenen magnetischen Flüsse der drei Spulen, die ihrerseits räumlich um jeweils 120° gegeneinander versetzt sind, im Innenraum des Ständers zu einem Gesamtfluß konstanten Betrags, dessen Richtung mit der Drehzahl $\omega/2\pi$ im Uhrzeigersinn rotiert!



$$\Phi_{R,S,T} = \frac{n}{R_m} \cdot i_{R,S,T} = \hat{\Phi} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{R,S,T})$$

$$\Phi_x = \Phi_R + \Phi_S \cos -120^\circ + \Phi_T \cos 120^\circ = \frac{3}{2} \hat{\Phi} \cos \omega t$$

$$\Phi_y = \Phi_S \sin -120^\circ + \Phi_T \sin 120^\circ = -\frac{3}{2} \hat{\Phi} \sin \omega t$$

$$\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} = \frac{3}{2} \hat{\Phi} = \text{const} \tag{8-3}$$

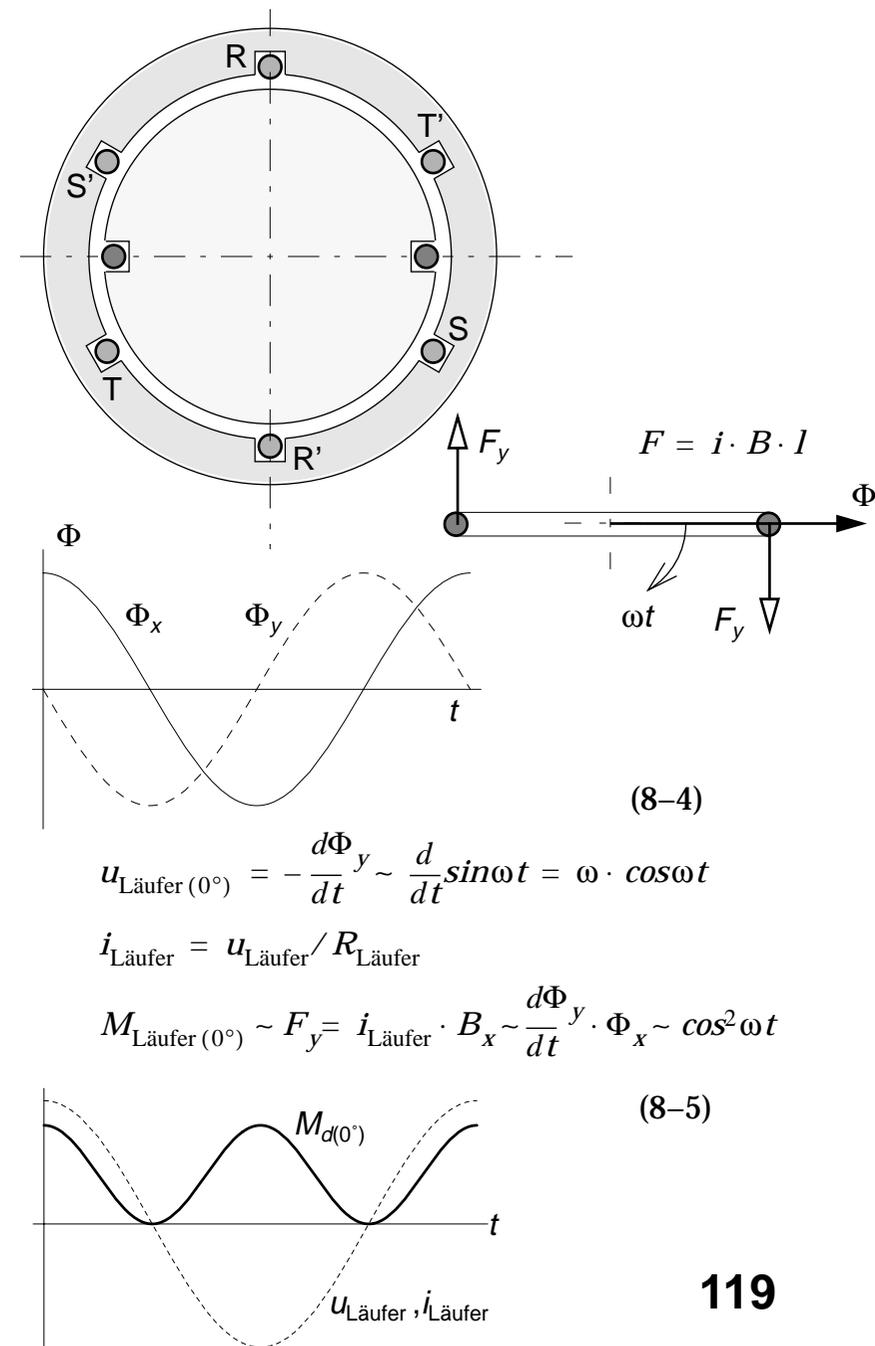
Von diesem Drehfeld könnte ein drehbar gelagerter Permanentmagnet (oder Gleichstrommagnet) mitgenommen werden. Er würde ein konstantes Drehmoment erfahren, solange er mit Synchronzahl rotiert. Ein Lastmoment, das das maximale Antriebsmoment übersteigt, würde ihn jedoch außer Tritt bringen. Er würde stehen bleiben und nicht selbsttätig wieder anlaufen. Ein solches Drehmomentverhalten ist für Antriebszwecke wenig brauchbar.

8.2.3 Der Asynchronmotor

Eine technisch elegante, d.h. eine robuste und einfache Lösung für einen Wechselstrommotor, der eine für viele Antriebsaufgaben günstige Drehmoment/Drehzahl-Kennlinie besitzt, stellt der *Asynchronmotor* dar.

Wir bringen statt des Permanentmagneten eine rotierend gelagerte, *kurzgeschlossene* Induktionsspule in den Drehfeldraum ein. In der gezeichneten Winkelstellung 0° wird die Schleife von der y -Komponente Φ_y des Ständerflusses durchsetzt, die eine Spannung nach Gl. (8-4) induziert. Da die Schleife kurzgeschlossen ist, fließt ein Strom $i_{\text{Läufer}}$ der nur durch den Innenwiderstand $R_{\text{Läufer}}$ der Schleife begrenzt ist.

Der Kurzschlußstrom in den Läuferstäben ruft nun nach Gl. (3-21) auf Seite 32 eine Kraft F im Magnetfeld hervor, die senkrecht zur momentanen Flußrichtung gerichtet ist. Ein auf die Schleife wirkendes Drehmoment entsteht durch die Kraftkomponente senkrecht zur Schleifenebene. In der gezeichneten 0° -Ausgangslage der Schleife ist dies die y -Komponente F_y . Sie wird allein von Φ_x verursacht. Zum Zeitpunkt $t=0$ sind sowohl Φ_x und als auch die *Änderung* von Φ_y maximal, so daß die induzierte Spannung und damit der Läuferstrom ihren Maximalwert erreichen. Aus dem Produkt der phasengleichen Funktionen Φ_x und $i_{\text{Läufer}}$ ergibt sich somit ein mit 2ω pulsierendes Drehmoment nach Gl. (8-5) in Richtung der Drehfeldrotation.

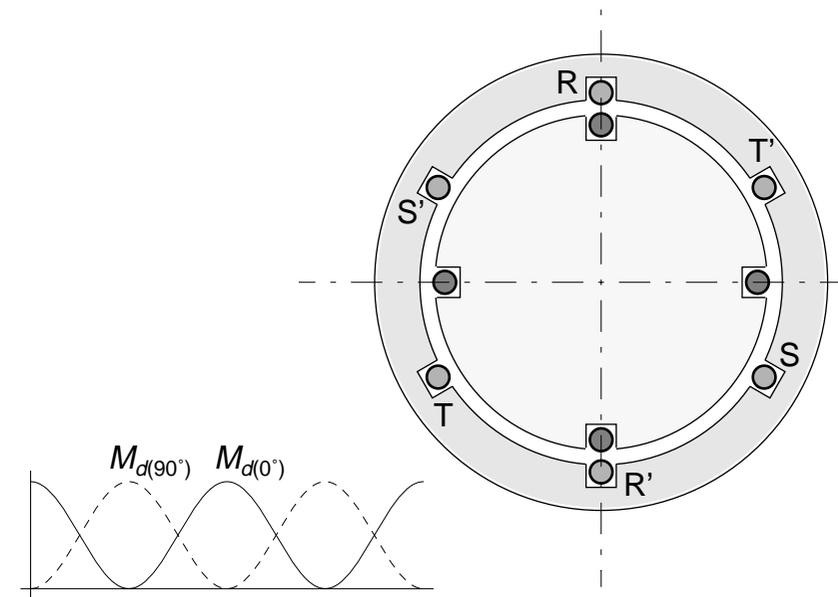


Die Pulsation des Drehmoments kann durch weitere Kurzschlußschleifen auf dem Läufer, die gegeneinander verdreht sind, aufgehoben werden. Bereits eine zweite um den Raumwinkel 90° gedrehte Schleife würde ein um den Phasenwinkel 90° versetzt pulsierendes Drehmoment liefern. Die Überlagerung beider Drehmomente ergäbe ein über den gesamten Umlauf des Drehfeldes *konstantes* Drehmoment!

Das in Drehrichtung des Drehfelds wirkende Drehmoment wird den Läufer in Bewegung setzen. Für einen Beobachter, der sich auf dem Läufer befände und mit ihm rotieren würde, würde sich das Drehfeld relativ um die zunehmende Drehzahl des Läufers langsamer drehen. In demselben Maße nimmt die induzierte Spannung ab, siehe Gl. (8-6). Die relative Abweichung der Läuferdrehzahl N von der Drehfeldfrequenz f wird *Schlupf* s genannt, Gl. (8-7).

Das Drehmoment wird also (jedenfalls in der Nähe der Synchrondrehzahl N_{sync} , d.h. der Drehzahl des Drehfeldes) proportional zum Schlupf sein. Je stärker das Lastmoment wird, desto mehr bleibt die Drehzahl hinter der Drehfeldfrequenz zurück, desto „asynchroner“ läuft der Motor. Da die Drehzahl eines Motors auf der Basis dieses Prinzips bei Belastung grundsätzlich geringer als die Synchrondrehzahl ist, wird dieser Motortyp Asynchronmotor genannt.

Um einen möglichst hohen Strom im Läufer zu erzeugen, werden die Leiterschleifen aus massiven Kupferstäben gebildet, mit denen der Läufer üblicherweise auf dem gesamten Umfang bestückt ist. Alle Leiterstäbe sind durch zwei Kurzschlußbringe an den Stirnflächen des Läufers gemeinsam zusammengeschaltet. Dies führt zu der Bezeichnung *Kurzschlußläufer*. Da dieser Motortyp keinerlei verschleißempfindliche Schleifringe benötigt, ist er weitgehend wartungsfrei. Er ist deshalb als universelle Antriebsmaschine weit verbreitet. Spezielle Bauformen sind auch für *Einphasenwechselstrom* geeignet. Für die Erzeugung des Drehfeldes ist dann eine sogenannte „Hilfsphase“ erforderlich, die zum Beispiel mittels eines Phasenschieberkondensators hergestellt werden kann.

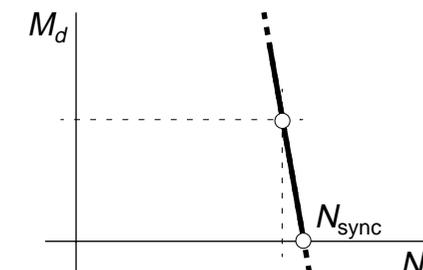


$$u_{\text{Läufer}} = - \frac{d\Phi_{\text{Schleife}}}{dt} \sim - \frac{d}{dt} \cos \omega_{\text{rel}} t = \omega_{\text{rel}} \cdot \sin \omega_{\text{rel}} t \quad (8-6)$$

$$\omega_{\text{rel}} = \omega - \omega_{\text{Läufer}}$$

$$N = \omega_{\text{Läufer}} / 2\pi \quad N_{\text{sync}} = \omega / 2\pi = f$$

$$s = \frac{\omega_{\text{rel}}}{\omega} = 1 - \frac{N}{f} \quad (8-7)$$

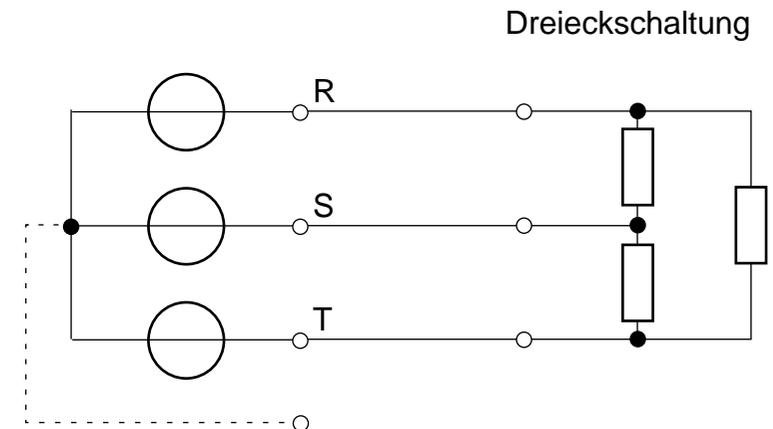
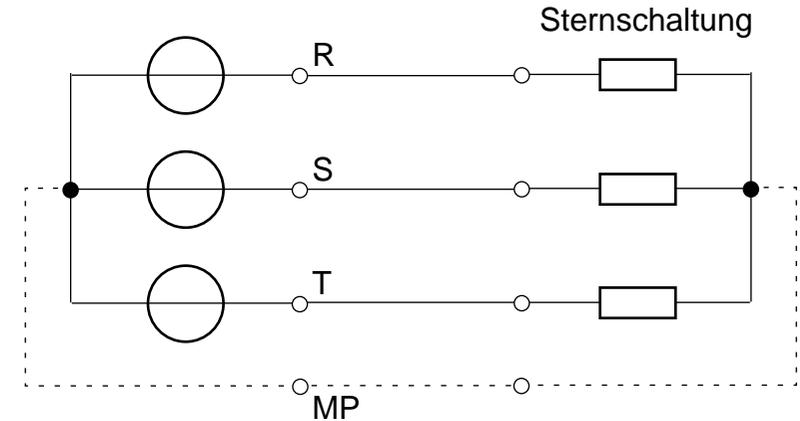


8.3 Dreiphasen-Netzwerke

In einem Dreiphasensystem speisen die drei phasenverschobenen Quellen drei Verbraucherzweipole. Verbraucher und Quellen werden jedoch nicht über drei voneinander getrennte Leiterpaare verbunden. Durch Verwendung eines gemeinsamen Rückleiters kann die Zahl der erforderlichen Leitungen auf vier reduziert werden. Eine Besonderheit ist die (technisch immer angestrebte) Verbrauchersymmetrie. Wenn alle drei Verbraucherwiderstände gleich sind, heben sich die Ströme der drei Stromkreise im gemeinsamen Rückleiter gegenseitig auf! Der vierte Leiter kann dann mit geringerem Querschnitt ausgelegt werden oder sogar ganz entfallen. Wir sprechen daher von Vierleiter-Systemen bzw. Dreileiter-Systemen. Letztere finden aus ökonomischen Gründen vor allem in der Energie-Fernübertragung Anwendung (Hochspannungs-Überlandleitungen).

Für die Zusammenschaltung der Verbraucher (in Drehstromsystemen *Stränge* genannt) ergeben sich zwei Möglichkeiten: Sie können wie die Quelle mit jeweils einer Klemme zu einem gemeinsamen Mittelpunkt zusammengeschaltet werden, der dann ggf. über den gemeinsamen Rückleiter mit dem Mittelpunkt (MP) der drei Quellen verbunden wird (der gemeinsame Rückleiter wird daher auch *Mittelpunktleiter* genannt). Diese Schaltung wird *Sternschaltung* genannt. Alternativ können sie auch zu einer Masche zusammengeschaltet werden, deren drei Knoten mit jeweils einer der drei Quellen verbunden werden. Diese Schaltung wird *Dreieckschaltung* genannt.

Die Vernetzung der Stromkreise schafft infolge der Phasendifferenzen zwischen den jeweils drei Teilsystemen auf der Quellenseite und der Verbraucherseite gewisse Komplikationen bei der Bezeichnung und Berechnung von Spannungen und Strömen. Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung läßt sich jedoch eine überschaubare Darstellung geben.



8.3.1 Beschreibung der Dreiphasenquelle

Die vier Klemmen der zusammengeschalteten drei Quellen werden allgemein mit R, S und T sowie MP für den Mittelpunktanschluß bezeichnet. Alle drei Quellen haben dieselbe Effektivspannung U_{Str} mit den Phasenlagen 0° , -120° und $+120^\circ$, gemessen als *Strangspannungen* jeweils zwischen den Klemmen R, S bzw. T gegen MP, Gl. (8-8).

Da der Mittelpunktleiter auch entfallen kann, werden im allgemeinen nicht die Strangspannungen, sondern die sog. *Leiterspannungen* U angegeben. Dies sind die zwischen jeweils zwei Leitern R→S, S→T und T→R zu messenden Spannungen. Wie die nebenstehende Rechnung am Beispiel \underline{U}_{ST} zeigt, ist der Effektivwert der Leiterspannung um $\sqrt{3}$ größer als der Effektivwert der Strangspannung, Gl. (8-9), und die Phasenwinkel sind um jeweils $+30^\circ$ verdreht, Gl. (8-10). Die Betrags- und Phasenbeziehungen zwischen Leiter- und Strangspannungen werden aus dem Zeigerdiagramm deutlich.

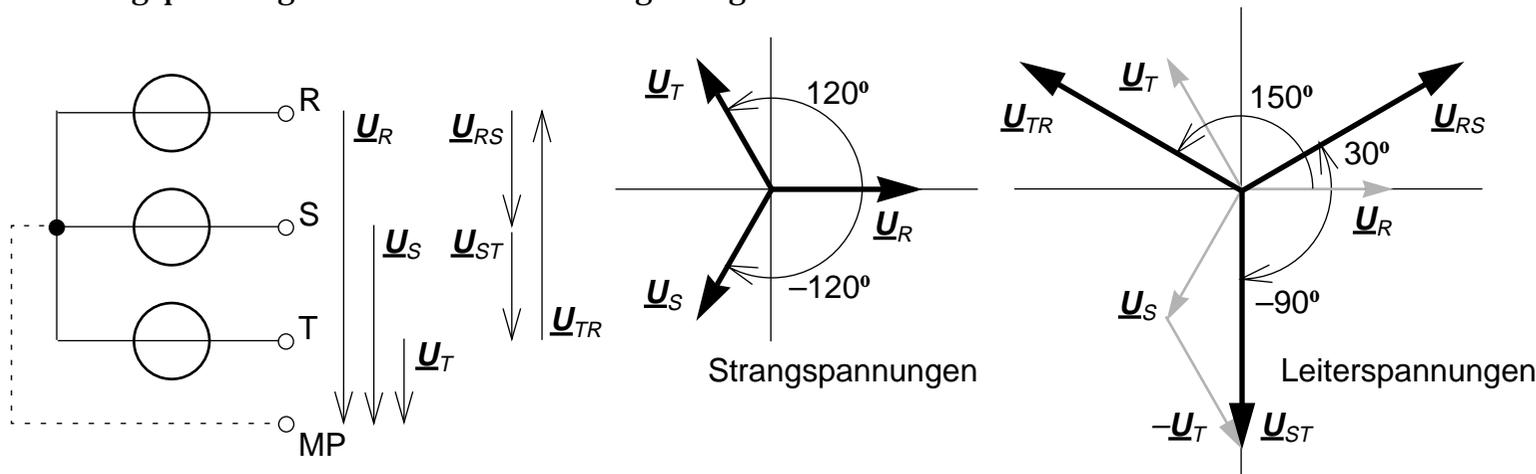
$$\underline{U}_R = U_{Str} \cdot e^{j0^\circ} = U_{Str} \quad (8-8)$$

$$\underline{U}_S = U_{Str} \cdot e^{-j120^\circ} = U_{Str} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$$

$$\underline{U}_T = U_{Str} \cdot e^{j120^\circ} = U_{Str} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T = -j\sqrt{3} \cdot U_{Str} = \sqrt{3} \cdot U_{Str} \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$U = \sqrt{3} \cdot U_{Str} \quad (8-9)$$



$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S = U \cdot e^{j30^\circ}$$

$$\underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T = U \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R = U \cdot e^{j150^\circ}$$

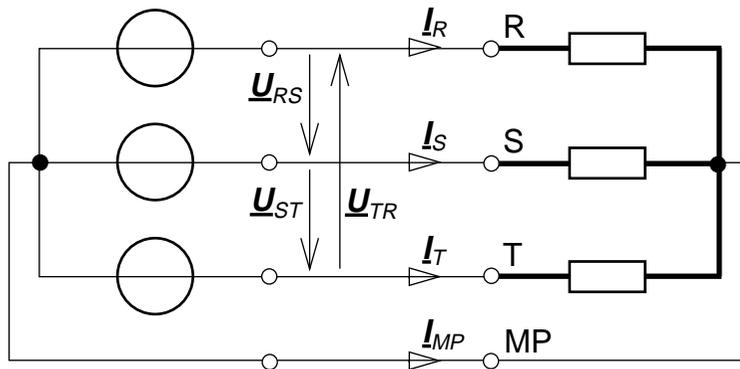
$$(8-10)$$

An Haushalte wird üblicherweise 400V-Drehstrom (früher 380V) geliefert. Mit diesem Wert ist die Leiterspannung gemeint. Einphasige Verbraucher werden zwischen einer der „Phasen“ und MP angeschlossen, also mit der Strangspannung von 230V (früher 220V) betrieben, Gl. (8-11).

$$U_{Str} = 230V \approx \frac{400}{\sqrt{3}}V \quad (8-11)$$

8.3.2 Verbraucher in Sternschaltung

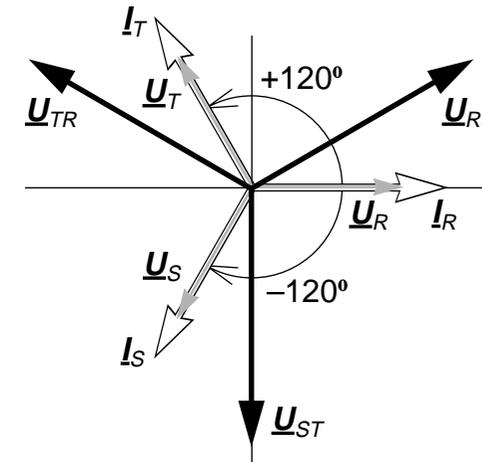
Der Verbraucher bestehe aus drei ohmschen Widerständen, die jeweils an die Klemmen R, S bzw. T angeschlossen sind. An ihrem zweiten Anschluß sind sie zum verbraucherseitigen Mittelpunkt MP zusammengeschlossen.



Wir berechnen die Strangströme $\underline{I}_{StrR,S,T}$ bei verbundenen Mittelpunkten. Jede Quelle schließt sich dann mit je einem Strangwiderstand zu einer Masche, so daß an dem Strangwiderstand jeweils die Strangspannung anliegt, Gl. (8-12). Die Leiterströme $\underline{I}_{R,S,T}$ sind bei einer Verbraucher-Sternschaltung identisch mit den Strangströmen $\underline{I}_{StrR,S,T}$. Die Knotengleichung (8-13) für den verbraucherseitigen Mittelpunkt ergibt für den behandelten Fall des symmetrischen Verbrauchers (alle Widerstände gleichgroß), daß der Strom im Mittelleiter *Null* wird. Der Mittelleiter darf daher bei symmetrischer Last entfallen, ohne daß am verbraucherseitigen MP eine Spannungsdifferenz gegenüber dem quellenseitigen MP auftritt. Der verbraucherseitige Mittelpunkt bildet dann einen „virtuellen“ Nullpunkt!

Bei einer Verbrauchersternschaltung berechnen sich die Leiterströme I und -spannungen U nach Gl. (8-14) aus den Strangströmen I_{Str} und -spannungen

$$\underline{I}_{R,S,T} = \underline{U}_{R,S,T} / R \quad (8-12)$$



$$(8-13)$$

$$\underline{I}_{MP} = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{1}{R} (\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T) = 0$$

$$e^{j0^\circ} + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} = 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 0$$

Stern: $I = I_{Str} \quad U = \sqrt{3} \cdot U_{Str} \quad (8-14)$

gen U_{Str} . Die vom Verbraucher aufgenommene Leistung wird gemäß Gl. (8-15) üblicherweise auf die *Leitergrößen* bezogen.

Bei unsymmetrischer Last und angeschlossenem MP-Leiter fließt auf diesem der Differenzstrom der Strangströme. Ist ein MP-Leiter nicht vorhanden, wird am verbraucherseitigen MP in diesem Fall eine Spannungsdifferenz gegenüber dem quellenseitigen MP auftreten.

Einfach zu berechnen ist der Fall, daß bei fehlendem MP-Leiter einer der Strangwiderstände entfällt, bzw. seine Zuleitung unterbrochen ist (in nebenstehendem Beispiel der Widerstand im R-Strang). Über der Serienschaltung der beiden verbleibenden Widerstände liegt dann die Leiterspannung. Der Betrag der Strangspannungen \underline{U}_S und \underline{U}_T ist daher jeweils $\frac{1}{2}U$. Der Verbraucher nimmt nun nur noch die *halbe* Leistung gegenüber der vollständigen Schaltung auf, Gl. (8-16). Die Spannungsdifferenz $\underline{U}_{\text{MP}}$ zwischen dem verbraucherseitigen MP und dem quellenseitigen MP beträgt in diesem Fall $\frac{1}{2}U_{\text{Str}}$

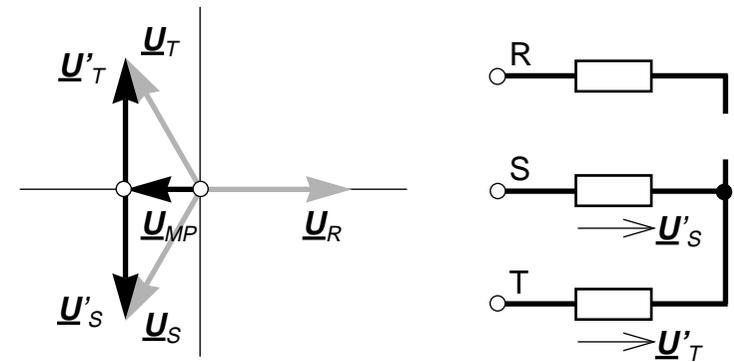
Die Energieversorgung der Haushalte erfolgt, wie bereits erwähnt, üblicherweise über Drehstromanschlüsse. Kleinverbraucher, die nicht mit drei Phasen gespeist werden, werden jeweils zwischen MP-Leiter ("Null" = blau) und einen der drei spannungsführenden Leiter R, S oder T ("Phase", auch L1, L2 und L3) geschaltet. Vorsicht, wenn der MP-Leiter unterbrochen wird: Bei Unsymmetrie des Verbrauchernetzes kann sich die Spannung in dem Strang mit dem größten Verbraucherwiderstand auf den maximal $\sqrt{3}$ -fachen Wert erhöhen und die Spannung zwischen dem verbraucherseitigen MP und dem quellenseitigen MP (=Nullpotential) kann maximal U_{Str} erreichen (Gefahr bei Berührung des normalerweise ungefährlichen MP-Leiters!).

8.3.3 Verbraucher in Dreieckschaltung

Als alternative Beschaltung der Verbraucherwiderstände können die drei Verbraucherstränge jeweils zwischen zwei Leitern angeschlossen werden. Sie bilden dann eine geschlossene Masche. Ein Mittelpunkt existiert schaltungsmäßig nicht mehr.

$$P_{R,S,T} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U \cdot I = \frac{U_{\text{Str}}^2}{R} = \frac{U^2}{3R}$$

$$P_{\text{ges}} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \frac{U^2}{R} \quad (8-15)$$

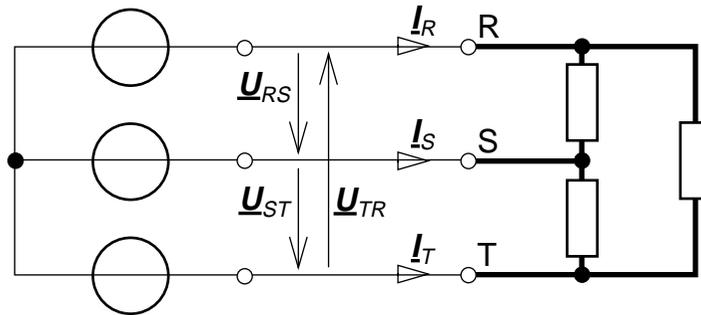


$$\underline{U}_S - \underline{U}_T = \underline{U}_{ST}$$

$$U'_S = U'_T = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot U_{\text{Str}} = \frac{1}{2} \cdot U$$

$$U_{\text{MP}} = \frac{1}{2} \cdot U_{\text{Str}} = \frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot U$$

$$P_{\text{ges}} = \frac{U^2}{2R} \quad (8-16)$$

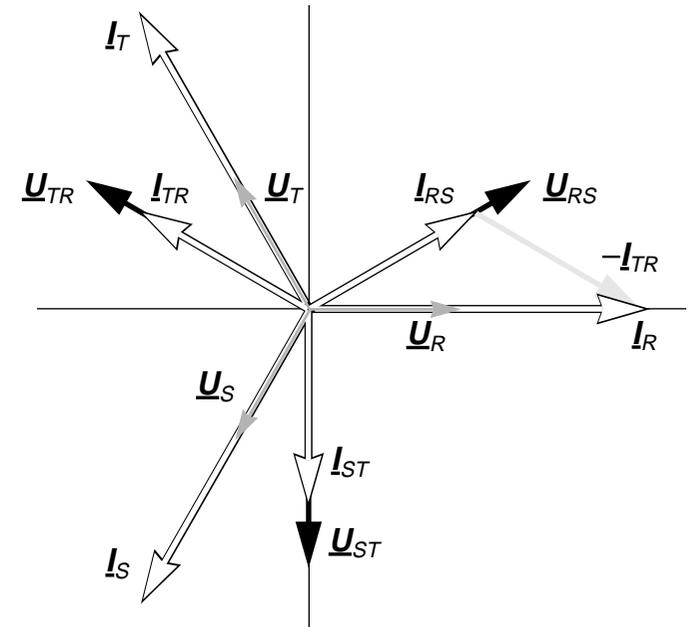


Für die Berechnung der Strangströme und -spannungen wird wieder von einer symmetrischen ohmschen Last R ausgegangen. Im Gegensatz zur Sternschaltung liegt bei der Dreieckschaltung über jedem Widerstand die *Leiterspannung* an, Gl. (8-17). Die Strangströme berechnen sich nach Gl. (8-18).

Bei einer Verbraucher-Dreieckschaltung sind die Leiterströme *nicht* identisch mit den Strangströmen, denn an den Leiterklemmen R, S und T findet jeweils eine Verzweigung statt. Die Berechnung der Leiterströme ist in Gl. (8-19) am Beispiel \underline{I}_R durchgeführt. Sie führt zu dem Ergebnis, daß \underline{I}_R die Phasenlage der R-Strangspannung der Quelle hat. Für die beiden weiteren Leiterströme gilt dies sinngemäß.

Dieses Ergebnis war zu erwarten, denn in den drei Quellen sind die Strangströme gleich den Leiterströmen, da bei den Quellen eine Sternschaltung vorliegt. Am quellenseitigen MP muß notwendigerweise die Summe aller drei Ströme Null ergeben. Die Phasenlage der drei Leiterströme muß mit der Phasenlage der Quellenstrangspannungen übereinstimmen, da ausschließlich Wirkleistung abgenommen wird.

Aus den Gleichungen (8-17), (8-18) und (8-19) ergeben sich die Leiterströme I und -spannungen U gemäß Gl. (8-20).



$$U_{\text{Str}} = U \tag{8-17}$$

$$I_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} / R \tag{8-18}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \underline{I}_{RS} - \underline{I}_{TR} = \frac{1}{R} (\underline{U}_{RS} - \underline{U}_{TR}) = \frac{U}{R} (e^{j30^\circ} - e^{j150^\circ}) \\ &= \frac{U}{R} \left(\left\{ \frac{1}{2}\sqrt{3} + j\frac{1}{2} \right\} - \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + j\frac{1}{2} \right\} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{U}{R} \cdot e^{j0^\circ} \end{aligned} \tag{8-19}$$

Dreieck: $I = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Str}} \quad U = U_{\text{Str}} \tag{8-20}$

Die höhere Spannung an den Verbrauchersträngen führt im Vergleich zur Sternschaltung zu einer dreifach höheren Leistung bei gleichem U und gleichem R , Gl. (8–21). Durch Umschaltung des Verbrauchers von Dreieck- in Sternschaltung kann seine Leistungsaufnahme auf $1/3$ reduziert werden.

In der folgenden Tabelle sind Strang- und Leitergrößen für beide Schaltungsvarianten zusammengestellt. Zur Definition:

- Leiterspannungen U sind die *zwischen* den Leitern, die die Verbraucherzweipole mit den Quellen verbinden, meßbaren Spannungen,
- Leiterströme I sind die *in* den Verbindungsleitern fließenden Ströme,
- Strangspannungen U_{Str} sind die an den Verbraucherzweipolen anliegenden Spannungen,
- Strangströme I_{Str} sind die durch die Verbraucherzweipole fließenden Ströme.

$$P_{R, S, T} = U_{\text{Str}} \cdot I_{\text{Str}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U \cdot I = \frac{U^2}{R}$$

$$P_{\text{ges}} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = 3 \frac{U^2}{R} \quad (8-21)$$

	Sternschaltung	Dreieckschaltung
Quelle	$U_{\text{Str}} = U_Q$ $\varphi = 0^\circ, -120^\circ, 120^\circ$ $U = U_{\text{Str}} \cdot \sqrt{3}$ $\varphi = 30^\circ, -90^\circ, 150^\circ$ $I_Q = I_{\text{Str}}$ $\varphi = 0^\circ, -120^\circ, 120^\circ$	
Verbraucher (symmetrisch, ohmsch)	$U_{\text{Str}} = U / \sqrt{3}$ $I_{\text{Str}} = I = U_{\text{Str}} / R$ $P_{\text{Str}} = U^2 / 3R$ $I = U / (R \cdot \sqrt{3})$ $P_{\text{ges}} = U^2 / R$	$U_{\text{Str}} = U$ $I_{\text{Str}} = I / \sqrt{3} = U_{\text{Str}} / R$ $P_{\text{Str}} = U^2 / R$ $I = \sqrt{3} \cdot U / R$ $P_{\text{ges}} = 3 \cdot U^2 / R$

Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt ab Seite 173

9 Formeln

Grundbegriffe	Kommentar	Verweis	Formel	Dimension
Spannung	Energie pro Ladungseinheit	(1-1):S. 6 (1-10): ...S. 10	$u = \frac{dw}{dq}$	$[u] = \text{V (Volt)}$
Strom	Ladungstransport pro Zeitintervall	(1-3):S. 8	$i = \frac{dq}{dt}$	$[i] = \text{A (Ampère)}$
Leistung	Spannung mal Strom	(1-13): ...S. 10	$p = u \cdot i$	$[p] = \text{W (Watt)}$
Ohmsches Gesetz	Strom und Spannung am Widerstand sind zueinander proportional	(1-14): ...S. 11	$u = R \cdot i$	$[R] = \Omega \text{ (Ohm)}$

Elektr. Feld	Kommentar	Verweis	Formel	Dimension
Kraftwirkung im elektrischen Feld	Ladung mal Feldstärke	(2-1):S. 17	$\mathbf{F}_e = q \cdot \mathbf{E}$	$\epsilon_{\text{Vakuum}} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
Kapazität		(2-10): ...S. 19	$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$	$[C] = \text{F (Farad)}$
Kondensatorladung	Spannung mal Kapazität	(2-12): ...S. 19	$q = C \cdot u_C$	$[q] = \text{C (Coulomb)}$
Kondensatorstrom	proportional zur Spannungsänderung	(2-13): ...S. 20	$i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$	
Kondensatorspannung	proportional zur transportierten Ladung (= Integral des Stroms)	(2-14): ...S. 20	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i \cdot dt$	

Magn. Feld	Kommentar	Verweis	Formel	Dimension
Feldgleichung	magnetische Feldstärke \mathbf{H} = Funktion der Stromdichte \mathbf{S}	(3-8):S. 27	$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_A \mathbf{S} d\mathbf{A}$	
Durchflutung	Summe aller Strompfade	(3-2):S. 26	$\Theta = \int_A \mathbf{S} d\mathbf{A} = n \cdot i$	$[\Theta] = \text{A}$
Magnetische Flußdichte	magnetische Feldstärke mal Permeabilitätskonstante μ	(3-5):S. 27	$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H}$	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Magnetischer Fluß	magnetische Flußdichte mal durchsetzte Fläche	(3-11): ...S. 28 (3-10): ...S. 28	$\Phi = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = B \cdot A$	
Magnetischer Widerstand	Analogie zum ohmschen Widerstand!	(3-18): ...S. 30	$R_m = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l}{A}$	
Magnetischer Kreis	Analogie zum Ohmschen Gesetz!	(3-19): ...S. 30	$\Phi = \frac{1}{R_m} \cdot \Theta$	
Lorentzkraft	Kraftrichtung senkrecht zu Bewe- gungsrichtung <i>und</i> Feldrichtung	(3-21): ...S. 32	$\mathbf{F}_m = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	
Kraft auf Leiter	senkrecht zu Leiterachse und Feldrichtung	(3-22): ...S. 33	$F_m = B \cdot i \cdot l$	
induzierte Spannung	in senkrecht zum magnetischen Feld bewegtem Leiter	(3-23): ...S. 34	$u_i = v \cdot B \cdot l$	

9 Formeln

Induktion	Kommentar	Verweis	Formel	Dimension
Induktionsgesetz	ind. Spannung proportional zur <i>Änderung</i> des magn. Flusses	(3-24): ...S. 34 (3-25): ...S. 35	$u_i = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt}$	
Induktivität	Spule mit n Windungen	(3-27): ...S. 36	$L = \frac{n^2}{R_m}$	[L] = H (Henry)
Spannung an Induktivität	proportional zur <i>Stromänderung</i>	(3-28): ...S. 37	$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	
Strom durch Induktivität	Integral der bisher anliegenden Spannung	(3-29): ...S. 37	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u_L \cdot dt$	
verkoppelte Spulen	Transformator: Windungszahlen n_1, n_2	(3-34): ...S. 39 (6-68): ...S. 96	$\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1} = \ddot{u}$	
Gegeninduktivität	bei verkoppelten Spulen	(3-36): ...S. 39	$M = \frac{n_1 n_2}{R_m} = \sqrt{L_1 L_2}$	

Netzwerke	Kommentar	Verweis	Formel	
Maschen- gleichung	in einem Maschenumlauf addieren sich alle Spannungen zu Null	(4-3):S. 54	$\sum u = 0$	
Knotengleichung	an einem Knoten ist die Summe aller Ströme Null	(4-9):S. 56	$\sum i = 0$	
Serienschaltung	Ersatzwiderstand = Summe der Einzelwiderstände	(4-2):S. 54	$R_s = \sum_n R_n$	
Parallelschaltung	Kehrwert des Ersatzwiderstandes = Summe der Einzelkehrwerte	(4-8):S. 56	$\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n}$	$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
Spannungsteiler	Serienwiderstände mit Abgriff zwi- schen den Widerständen	(4-1):S. 53	$u_2 = u_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	
Stromteiler	Parallelwiderstände teilen einen Strom auf	(4-6):S. 55	$i_2 = i_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	
Spannungsquelle mit Innenwiderst.	Serieninnenwiderstand R_i erklärt Spannungsabfall bei Belastung R	(4-10): ...S. 57	$u_Q = u_L \cdot \frac{R}{R + R_i}$	
Duale Quellen	Spannungsqu. mit Serienwiderst. = Stromquelle mit Parallelwiderstand	(4-12): ...S. 58	$i_K = \frac{u_L}{R_i}$	

9 Formeln

Wechselstrom	Kommentar	Verweis	Formel	
Zeitfunktion	Cosinus-Schwingung	(6-36): ...S. 87 (6-37): ...S. 87	$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$	$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$
Frequenz		(6-4):S. 74	$\omega = 2\pi f$	[f] = Hz (Hertz)
Periodendauer		(6-3):S. 74	$T = 1/f$	[T] = s (Sekunde)
Phasenwinkel	positiver Phasenwinkel = Voreilen	(6-5):S. 75	$\varphi = -\omega \cdot t_{\max}$	
Widerstand	Strom mit Spannung in Phase	(6-8):S. 76	$\hat{i}_R = \frac{1}{R} \cdot \hat{u}_R$	$\varphi_i = \varphi_u$
Induktivität	Strom eilt Spannung <i>nach</i>	(6-14): ...S. 77	$\hat{i}_L = \frac{1}{\omega L} \cdot \hat{u}_L$	$\varphi_i = \varphi_u - 90^\circ$
Kapazität	Strom eilt Spannung <i>voraus</i>	(6-17): ...S. 78	$\hat{i}_C = \omega C \cdot \hat{u}_C$	$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$

Komplexe R.	Kommentar	Verweis	Formel	
Eulerscher Satz		(6-22): ...S. 82	$e^{j\alpha} = \cos\alpha + jsin\alpha$	
Komplexe Darst.:	Spannung, Strom	(6-36): ...S. 87	$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$	$\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$
Effektivwert		(6-37): ...S. 87	$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{u}$	$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{i}$
Komplexe Darst.:	ohmscher Widerstand	(6-39): ...S. 88	$\underline{Z}_R = R \cdot e^{j0^\circ} = R$	
	Induktivität	(6-40): ...S. 89	$\underline{Z}_L = \omega L \cdot e^{j90^\circ} = j\omega L$	
	Kapazität	(6-41): ...S. 89	$\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} = -j\frac{1}{\omega C}$	

9 Formeln

W'str.-Leistung	Kommentar	Verweis	Formel	
Komplexe Last	Verbraucher mit Blindkomponente	(6-38): ...S. 88	$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$	$\underline{Z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j\text{Im}(\underline{Z})$
Wirkleistung	genutzte elektrische Leistung	(6-73): ...S. 102	$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi_z$	$[p] = \text{W (Watt)}$
Blindleistung	siehe Abschnitt 6.2.4 auf Seite 79	(6-73): ...S. 102	$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi_z$	
Scheinleistung		(6-73): ...S. 102	$S = U \cdot I = I^2 \cdot Z$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
Leistungsfaktor		(6-73): ...S. 102	$\cos\varphi_z = \frac{\text{Re}(\underline{Z})}{Z}$	
Blindfaktor		(6-73): ...S. 102	$\sin\varphi_z = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{Z}$	

Filter	Kommentar	Verweis	Formel	
Komplexe Darst.	komplexer Übertragungsfaktor (Betrag und Phase)	(7-2):S. 107 (7-3):S. 107	$\underline{J}_A(\omega) = \underline{F}(\omega) \cdot \underline{U}_E(\omega)$	$\underline{F}(\omega) = F(\omega) \cdot e^{j\varphi_F(\omega)}$
Kaskadierung	Beträge von \underline{F}_i werden multipliziert, Phasenwinkel addiert	(7-7):S. 107	$F = \prod_i F_i$	$\varphi_F = \sum_i \varphi_{F_i}$
Tiefpaßfilter	RC- oder LR-Spannungsteiler	Seite 110	$\underline{F} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$	$\tau = R \cdot C = \frac{L}{R}$
Hochpaßfilter	CR- oder RL-Spannungsteiler	Seite 110	$\underline{F} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$	$\tau = R \cdot C = \frac{L}{R}$

10 Stichworte

A

Akkumulator 6
Ampere 8
Amplitude 75
Anker 45
Asynchronmotor 119

B

Batterie 52
 Akkumulator– 6
 Trocken– 6
Betrag 82
Blind–
 –faktor 102
 –leistung 79, 102
Blindwiderstand 79
 induktiver 89
 kapazitiver 89
 Kompensation 95
Bode-Diagramm 111
Brückenschaltung 61, 69
Bürste 45

C

Chip 70
Cosinus 73, 74

D

Dezibel 112
Dielektrizitätskonstante 17
Differential–
 –gleichung 21
 –quotient 8
Diode 67
Dotierung 67
Drain 70
Drehfeld 117, 118
Drehstrom 115
 –generator 117
 Haushalts– 122
 –maschinen 117
 –motor 119
Dreieckschaltung 121, 124
Dreiphasen–
 –netzwerk 121
 –quelle 122
 –system 115
Dualität
 Induktivität/Kapazität 37
 Stromquelle/Spannungsqu. 48, 59
Durchbruchsspannung 68
Durchflutung 26
Durchlaßrichtung 67
Dynamo 44

E

Effektivwert 83
e-Funktion 21
Einschaltvorgang:
 Induktivität 37
 Kapazität 22
Elektromechanischer Wandler 40
Elektron 5
Elektronenbewegung 8
Elementarteilchen 5
Energie: elektrische 9
Energiespeicher...
 induktiver 38
 kapazitiver 19
Entladevorgang 20
Ersatz–
 –element 63
 –spannungsquelle 53
 –spannungsquelle: komplexe 98
 –stromquelle 55
 –widerstand 54, 56
Ersatzquellenverfahren 65
Euler:
 Eulersche Zahl 21
 Eulerscher Satz 82
Exponentialfunktion 21

10 Stichworte

- F**
Feld 15
 elektrostatisches 16
 magnetisches 25
Feldeffekt-Transistor (FET) 70
Feldstärke
 elektrische 17
 magnetische 27
ferromagnetische Stoffe 29
Filter 105
 Bandpaß- 113
 Hochpaß- 110
 Kaskadierung 111
 Tiefpaß- 110
Flächenvektor 17
Fluß...
 elektrischer 17
 magnetischer 28
Flußdichte...
 elektrische 17
 magnetische 25
Fourierreihe 106
Frequenz 74
 -abhängigkeit 105
 -band 112
 Grenz- 109
 -komponenten 106
 -spektrum 106
Frequenzgang 109, 110
 Bode-Diagramm 111
- G**
Gate 70
Gegeninduktivität 39
Generator ...
 Grundprinzip 44
 Wechselstrom- 117
Gleichrichter 68
Gleichrichtung...
 Halbwellen- 68
 Vollwellen- 69
- H**
Halbleiter 67
Hertz 74
- I**
i/u-Diagramm 48
Imaginärteil 82
Imaginärzahl 81
Induktionsgesetz 34
Induktivität 36, 37, 49, 77
 Gegen- 39
Innenwiderstand 57
Integration 9
Isolator 8
- K**
Kapazität 19, 49, 78
Kaskadierung 107
 von Filtern 111
- Klemme 13, 47
Knoten 55, 60
Knotengleichung 56
 komplexe 97
 unabhängige 61
Kommutator 45
Kompensation 94
komplexe...
 Ebene 82
 Zahlen 81
 Rechenregeln 85
Kondensator 18
 Entkopplungs- 114
 -gleichung 19
konjugiert komplexe Zahl 86
Kraft
 auf stromdurchflossenen Leiter 33
 im elektrostatischen Feld 17
 im Magnetfeld 31
Kraftvektor 18
Kreisfrequenz 74
Kurzschluß 58
 -läufer 120
- L**
Ladevorgang 22
Ladung 6, 19
Ladungs-
 -inkrement 17
 -speicher 19
 -träger 5

10 Stichworte

Läufer 45, 117
 Kurzschluß– 120
Lautsprecher 42
Leerlauf 58
Leistung 9
 komplexe 102
 Verlust– 12
Leistungsfaktor 102
Leiter
 elektrischer 8
 magnetischer 29
 –spannung 122
 –strom 123
Lichtbogen 38
Lorentzkraft 32
Luftspalt 30

M

Magnet, Permanent– 31
Magnetfeld 25
 radiales 42
Masche 54, 60
Maschengleichung 54
 komplexe 97
 unabhängige 61
Maschinen, elektrische 43
Mikrophon 43
Mittelpunkt 121, 123
Motor
 Asynchron– 119
 Synchron– 44, 45
 Wechselstrom– 119

N

Nachrichtentechnik 105
Nebenschluß 59
Netzwerk 47
 –elemente 47

O

Ohm 11
Ohmsches Gesetz 11
 der komplexen WS-Rechnung 88
 des magnetischen Kreises 30
Ortskurve 108, 110

P

Parallelschaltung:
 ohmsche Widerstände 55
 Wechselstromwiderstände 92
 Kapazität/ohmscher Wid. 93
 Induktivität/ohmscher Wid. 93
 Induktivität/Kapazität 94
Periodendauer 74
Permeabilitätskonstante 27
 relative 29
Phasen–
 –differenz 75
 –lage 75
 –verschiebung 75
 –winkel 75
Potentiometer 53
Proton 5

Q

Quellenumwandlung 59, 66

R

Realteil 82
Rechtsschraubenregel 26, 32
Reziprozität 41, 44
Rotor 45

S

Schaltplan 12
Schein–
 –leistung 102
 –widerstand 88
Scheitelwert 75
Schleifring 117
Schlupf 120
Schwingung 73
Selbstinduktion 36
Serienschaltung:
 Spannungsquellen 52
 ohmsche Widerstände 53
 Wechselstromwiderstände 90
 Kapazität/ohmscher Wid. 91
 Induktivität/ohmscher Wid. 91
 Induktivität/Kapazität 94
Shunt 59
Signal 105
 –übertragung 105
 –verarbeitung 105
Silizium 67

10 Stichworte

- Sinus 73
- Source 70
- Spannung 5, 17
 - induzierte 34
 - Leerlauf– 58
 - pfeil 13, 47
 - quelle 48
 - quelle, reale 57
 - Wechsel– 73
- Spannungsfolger 72
- Spannungsteiler 53
 - komplexer 95
- Spannungsteilerregel 53
- Sperrichtung 67
- Sperrkreis 94
- Spitzenwert 75
- Spule 29, 35, 37
 - Tauch– 42
 - verkoppelte Spulen 39
- Ständer 117
- Sternschaltung 121, 123
- Störstelle 68
- Strang 121
 - spannung 122
 - strom 123
- Streufeld 30
- Strom 7
 - dichte 25
 - kreis 12, 51
 - Kurzschluß– 58
 - laufplan 12
 - pfeil 13, 47
 - quelle 48, 58
 - verzweigung 55
 - Wechsel– 73
 - wender 45
- Stromteilerregel 56
- Synchron
 - drehzahl 119, 120
 - frequenz 45
 - generator 118
 - motor 44
- T**
- Tauchspule 42
- Temperaturkoeffizient 12
- Transformator 40, 99
- Transistor 70
- U**
- Übertragungsfunktion 106
- V**
- Vektor 15
 - Flächen– 17
 - Kraft– 18
 - produkt 32
 - Weginkrement– 18
- Verbraucher 51
 - symmetrischer 123
- Verlustleistung 12
- Verstärker 71
 - Entkopplungs– 71
 - Wechselspannungs– 114
- Volt 6
- W**
- Watt 10
- Wechselspannung 44
- Wechselstrom 73
 - generator 117
 - motor 119
 - rechnung, komplexe 80
- Widerstand 49, 76
 - Diagonal– 61
 - elektrischer 11
 - Innen– 57
 - komplexer 87
 - magnetischer 30
 - nichtlinearer 49
 - spezifischer 11
 - Temperaturabhängigkeit 11
- Wirk
 - leistung 102
 - widerstand 79
- Z**
- Zeiger 74
 - darstellung 83
 - diagramm 84
- Zeitkonstante 21, 108
- Zweig 60
 - gleichung 61
- Zweipol 47

Übungsaufgaben

Aufgabenbereich 1: Elektrische Energie, Spannung und Strom^{*}

Aufgabe 1.1:

Ein Kupferleiter mit kreisförmigen Querschnitt A wird von einem Strom i durchflossen.

$$i = 143 \text{ A}$$

$$\rho = (1/56) \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$$

$$A = 35 \text{ mm}^2$$

$$q_E = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Elementarladung})$$

- Wie groß ist der Leiterwiderstand pro m Kabellänge?
- Welche Ladungsmenge q fließt in 10 s durch einen Leiterquerschnitt? Wievielen Leitungselektronen entspricht das?
- Wie groß ist die Stromdichte S im Leiter?

* Abschnitt 1 ab Seite 5

Aufgabe 1.2:

An der Erregerwicklung einer Gleichstrommaschine (Nennspannung u) wird bei Raumtemperatur ϑ_K ein Widerstand R_{kalt} gemessen. Nach längerem Betrieb der Maschine hat sich der Wicklungswiderstand auf R_{warm} erhöht.

$$\begin{array}{ll} u = 230 \text{ V} & S = 2,5 \text{ A/mm}^2 \\ R_{kalt} = 180 \text{ } \Omega & \rho_{20} = 0.017 \text{ } \Omega \text{ mm}^2 / \text{ m} \\ R_{warm} = 228 \text{ } \Omega & \vartheta_{kalt} = 28 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}) \end{array}$$

- Auf welche mittlere Temperatur hat sich die Wicklung erwärmt?
- Geben Sie die in der Wicklung umgesetzte Leistung bei $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ und $90 \text{ } ^\circ\text{C}$ mittlerer Wicklungstemperatur an.
- Die Wicklung besteht aus Cu-Lackdraht mit kreisförmigem Querschnitt. Berechnen Sie den Querschnitt des Drahtes, wenn die Stromdichte S (bei $20 \text{ } ^\circ\text{C}$) bekannt ist.

Aufgabe 1.3:

Die Beleuchtung eines Pkw nimmt bei der Nennspannung u_N einer Batterie mit der Ladekapazität q_{max} die Leistung p auf.

$$\begin{array}{l} u_N = 12 \text{ V} \\ p = 120 \text{ W} \\ q_{max} = 36 \text{ Ah} \end{array}$$

- Wie lange reicht eine Batterieladung zur Speisung der Beleuchtung? (Annahme: Die Batteriespannung bleibe bei der Entladung konstant.)

Aufgabe 1.4:

Ein elektrisches Heizgerät mit einer Nennleistung p_N und einer Nennspannung u_N wird über eine Doppelleitung aus Kupfer der Länge l an eine Spannungsquelle mit der Klemmenspannung u_1 angeschlossen. Der Spannungsabfall auf der Leitung soll 5% der Nennspannung nicht überschreiten.

$$u_N = 230 \text{ V}$$

$$p_N = 10 \text{ kW}$$

$$l = 100 \text{ m}$$

- a. Berechnen Sie den bei Nennspannung vom Heizgerät aufgenommenen Strom i .
- b. Mit welchem Leiterquerschnitt A muß die Leitung mindestens ausgeführt werden? (Normquerschnitte: 2,5; 4; 10; 16; 25 mm²)
- c. Wie groß müßte in diesem Fall die Spannung u_1 am Leitungsanfang sein, um das Gerät mit Nennspannung zu versorgen?
- d. Auf welchen Wert steigt die Spannung u_2 am Leitungsende, wenn das Gerät abgeschaltet wird?
- e. Mit welchem Wirkungsgrad η wird die elektrische Energie w übertragen?

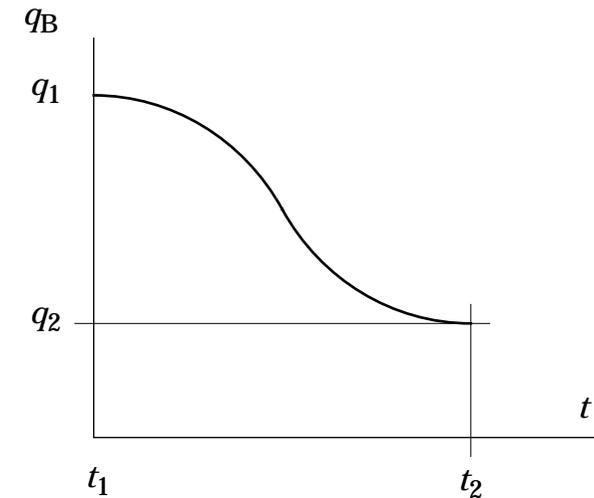
Der Wirkungsgrad η ist das Verhältnis der abgegebenen (d.h. nutzbar gemachter) Leistung zur zugeführten Leistung in %!

Aufgabe 1.5:

Im Verlauf des Entladens einer Batterie ergibt sich der nebenstehend skizzierte zeitliche Verlauf der Batterie(rest)ladung.

$$q_B = q_2 (2 + \cos \pi t / T) \quad q_2 = 10 \text{ Ah}$$
$$T = t_2 - t_1 = 15 \text{ min} \quad t_1 = 0$$

- Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Entladestroms im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ (Rechnung und Zeichnung)!
- Wie groß müßte ein konstanter Entladestrom sein, der in derselben Zeit dieselbe Entladung verursacht? Welchen zeitlichen Verlauf würde die Batterieladung in diesem Fall nehmen (Rechnung und Zeichnung)?



Aufgabenbereich 2: Elektrisches Feld, Kondensator*

Aufgabe 2.1:

Ein Plattenkondensator ist auf die Spannung u_{C1} aufgeladen. Die Kondensatorplatten sind quadratisch (Seitenlänge a) im Abstand d . Das Dielektrikum zwischen den Platten sei Luft. Der Einfluß des Streufeldes werde vernachlässigt.

$$u_{C1} = 100 \text{ kV}$$

$$a = 500 \text{ mm}$$

$$d = 40 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Berechnen Sie

- den Betrag der elektrischen Feldstärke E zwischen den Kondensatorplatten,
- die Kapazität C ,
- die Ladung q und
- den Energieinhalt w_e des Kondensators!
(Achtung: Hier muß berücksichtigt werden, daß u_C während des Ladevorgangs von 0 auf u_{C1} steigt!)
- Wie ändert sich die Kapazität C , wenn der Kondensator mit Papier ($\varepsilon_r = 5$) statt Luft gefüllt wird?
- Wie ändert sich die Kapazität C , wenn nur eine Hälfte des Kondensators mit Papier ($\varepsilon_r = 5$) als Dielektrikum gefüllt wird?

* Abschnitt 2 ab Seite 15

Aufgabe 2.2:

Zwischen zwei parallelen Platten mit dem Abstand d befindet sich ein Elektron. Zwischen den Platten herrscht eine Gleichspannung u .

$$u = 3000 \text{ V}$$

$$d = 3 \text{ mm}$$

$$q_E = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Elementarladung})$$

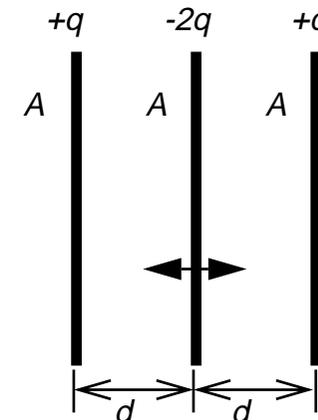
- Berechnen Sie den Betrag der Kraft F_e , die auf das Elektron ausgeübt wird!
- Wie groß ist die Energiedichte w_{DE} des elektrischen Feldes?

Die Energiedichte eines Feldes ist seine Energie pro Volumeneinheit, d.h. dw/dV .

Aufgabe 2.3:

Drei gleich große Platten (Plattenfläche A) befinden sich im Vakuum. Der Abstand d zwischen den Platten ist klein gegenüber den Querabmessungen. Die linke und die rechte Platte tragen jeweils die Ladung $+q$, die mittlere Platte die Ladung $-2q$. Die beiden äußeren Platten sind fest an ihrem Platz fixiert, wogegen die mittlere Platte verschoben werden kann.

- Berechnen Sie die elektrische Energie des gesamten Systems!
- Wie ändert sich die elektrische Energie des gesamten Systems, wenn die mittlere Platte um die Strecke x_0 verschoben wird?



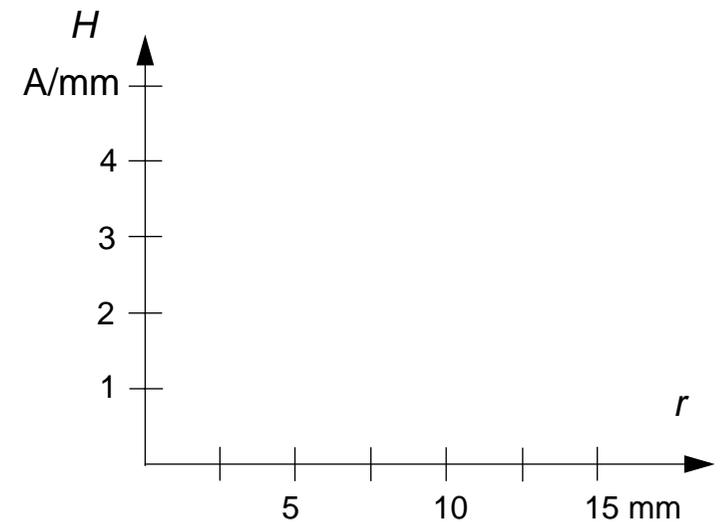
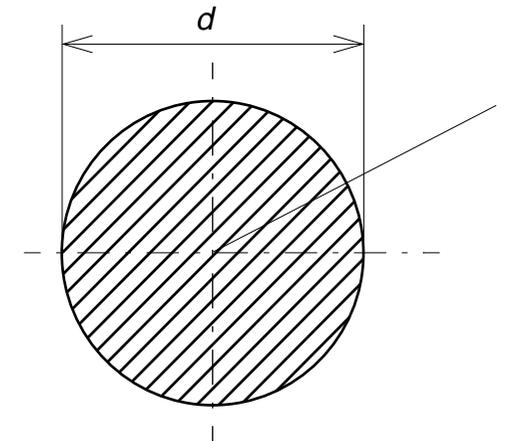
Aufgabenbereich 3: Magnetisches Feld, Lorentzkraft, Induktion *

Aufgabe 3.1:

Ein langer gestreckter Leiter mit dem Durchmesser d wird von einem Strom i durchflossen.

$$d = 2 \cdot r_0 = 10 \text{ mm}$$
$$i = 100 \text{ A}$$

- Berechnen Sie den Betrag der magnetischen Feldstärke H in Abhängigkeit vom Abstand r zur Leiterachse außerhalb und innerhalb des Leiters.
- Skizzieren Sie den Verlauf von H in Abhängigkeit vom Radius r im Bereich $0 \leq r \leq 3 \cdot r_0$.



* Abschnitt 3 ab Seite 25

Aufgabe 3.2:

Ein langer gerader Leiter mit dem Radius r_0 wird von einem Strom i durchflossen. Um den Leiter liegt konzentrisch zur Leiterachse ein geschlossener Holzring mit dem Querschnitt A und dem mittleren Umfang l .

$$r_0 = 5 \text{ mm}$$

$$l = 0,5 \text{ m}$$

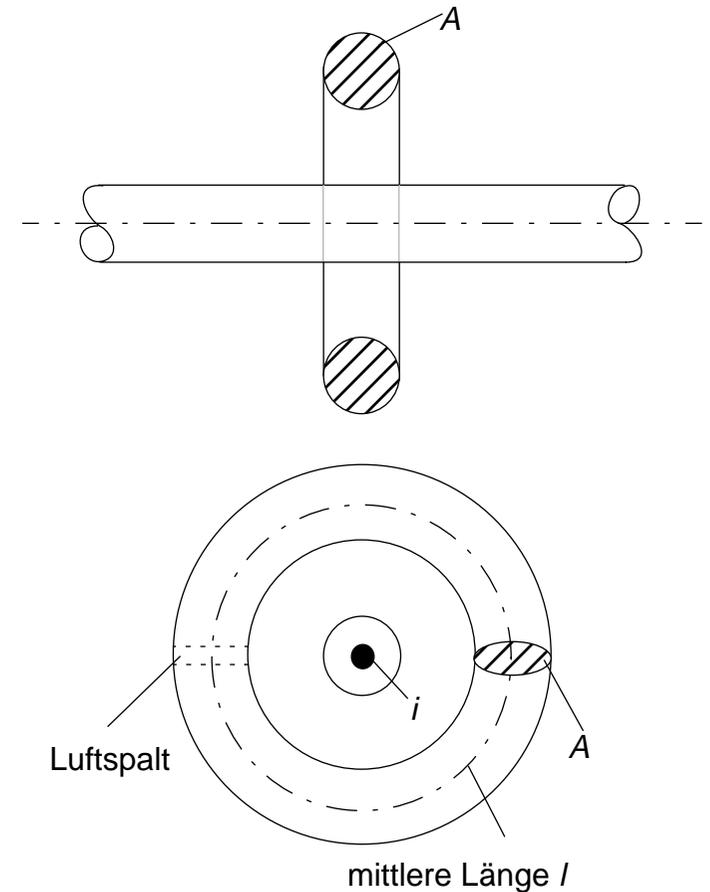
$$i = 10 \text{ A}$$

$$A = 200 \text{ mm}^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

$$\mu_r = 4000$$

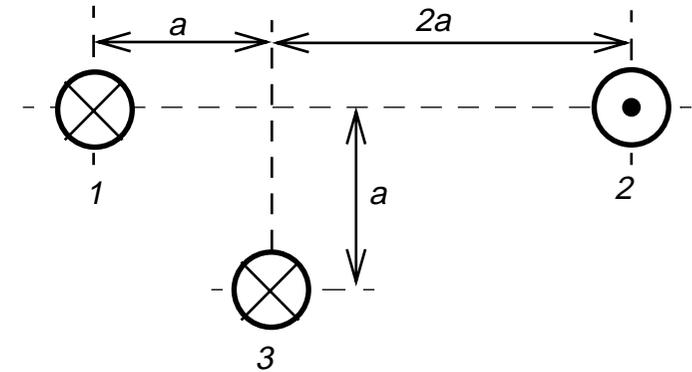
- Wie groß ist die mittlere magnetische Feldstärke H (d.h. die Feldstärke auf einem mittleren Umfang des Ringes), die mittlere magnetische Flußdichte B sowie der magnetische Fluß Φ innerhalb der Querschnittsfläche in dem Ring?
- Wie groß sind die entsprechenden Größen, wenn man den Holzring durch einen Eisenring mit der relativen Permeabilität μ_r ersetzt?
- Berechnen Sie die mittlere magnetische Feldstärke H , die mittlere Flußdichte B und den magnetischen Fluß Φ in Eisen und Luft, wenn der Eisenring durch einen Luftspalt von 5 mm Länge unterbrochen wird! (Die Streuung des Feldes ist vernachlässigbar.)
- Wie groß ist der magnetische Widerstand R_m des Ringes in den Fällen b) und c)?
- Berechnen Sie den magnetischen Fluß Φ für b) sowie für c) mit Hilfe der unter d) ermittelten Werte des magnetischen Widerstandes R_m !



Aufgabe 3.3:

Eine Anordnung von drei stromdurchflossenen (i_1, i_2, i_3), langen geraden und parallelen Leitern (L_1, L_2, L_3) befindet sich in einem Medium mit der Permeabilität μ_0 . Die Leiterdurchmesser sind gegenüber den Abständen zwischen den Leitern zu vernachlässigen.

- Bestimmen Sie \vec{H} in kartesischen Koordinaten am Ort des Leiters L_3 !
Hinweis: Überlagern Sie die durch i_1 und i_2 erzeugten Einzelfelder.
- Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten den Kraftbelag, d.h. die Kraft pro Längeneinheit $\vec{F}_3 = \vec{F}_3/l$, der auf den Linienleiter L_3 wirkt.
- Für welches Stromverhältnis i_1/i_2 wirkt auf den Leiter L_3 keine Kraftkomponente in y-Richtung?
- Für welches Stromverhältnis i_1/i_2 wirkt auf den Leiter L_3 keine Kraftkomponente in x-Richtung?



Aufgabe 3.4:

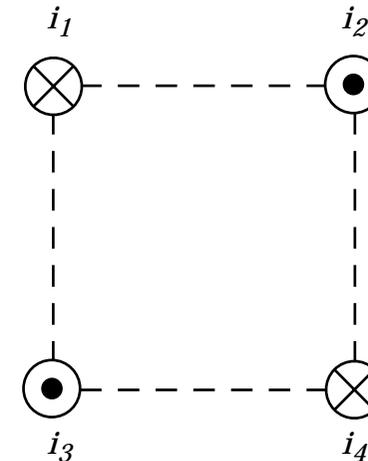
Die Mittelpunkte der Querschnittsflächen von vier dünnen, parallelen und stromdurchflossenen Leitern bilden die Ecken eines Quadrates mit der Kantenlänge a . Die Anordnung befindet sich in einem Medium mit der Permeabilität μ_0 .

$$i_1 = 3\text{A}$$

$$i_2 = 1\text{A}$$

$$i_3 = 1\text{A}$$

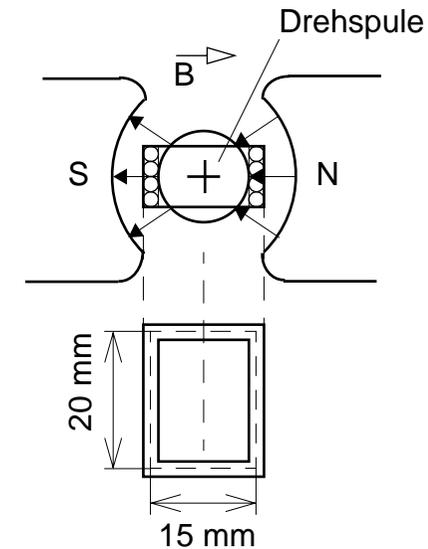
- Wie groß muß der Strom i_4 sein, damit auf den Leiter 1 keine Kraft ausgeübt wird?



Aufgabe 3.5:

Wie groß ist die Windungszahl der Drehspule eines Drehspulinstrumentes mit einem Meßbereich von 10 mA, wenn im Luftspalt die magnetische Flußdichte $B = 0,4 \text{ T}$ beträgt?

Die Feder erzeugt bei Endausschlag ein Drehmoment $M_D = 19,68 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$.



Aufgabe 3.6:

Eine rechteckige Spule mit den gegebenen Abmessungen bewege sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit v senkrecht auf ein räumlich begrenztes homogenes Magnetfeld zu, durch dieses hindurch und wieder von ihm weg (siehe Zeichnung).

$$h = 20 \text{ mm}$$

$$n = 100$$

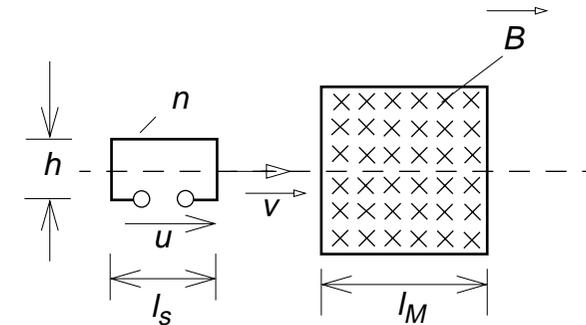
$$B = 1 \text{ T}$$

$$l_s = 20 \text{ mm}$$

$$l_M = 70 \text{ mm}$$

$$v = 150 \text{ m/s}$$

- Berechnen Sie den Maximalwert der in der Spule induzierten Spannung u .
- Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung u .



Aufgabe 3.7:

Eine kreisförmige Spule (Radius r_0) aus Kupferdraht (Drahtdurchmesser d ; spezifischer Widerstand ρ) mit n Windungen wird in einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} gleichmäßig mit der Drehzahl f gedreht. Die Drehachse steht senkrecht zum Magnetfeld. Die beiden Enden der Spule sind kurzgeschlossen. Die Temperatur beträgt $20\text{ }^\circ\text{C}$. Rückwirkungen sind zu vernachlässigen.

$$f = 30\text{ s}^{-1}$$

$$n = 70$$

$$r_0 = 0,2\text{ m}$$

$$d = 0,1\text{ mm}$$

$$\rho = \frac{1}{56} \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}} \text{ bei } 20\text{ }^\circ\text{C}$$

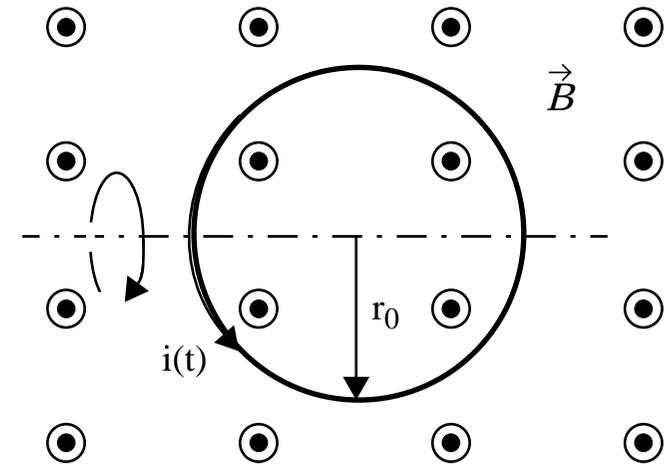
$$\alpha_{\text{Cu}} = 4 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$B = 10^{-2} \text{ T} = 10^{-2} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

- Wie groß ist der Widerstand R der Spule?
- Berechnen und skizzieren Sie den Strom $i(t)$ in der Spule!
- Welche Leistung $p(t)$ muß als Antriebsleistung aufgebracht werden?
- Berechnen Sie das Drehmoment $M(t)$, mit dem die Spule angetrieben werden muß!

Die Temperatur wird nun von $20\text{ }^\circ\text{C}$ auf $40\text{ }^\circ\text{C}$ erhöht (α_{Cu} : Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes von Kupfer).

- Berechnen Sie jetzt das Drehmoment $M_{40}(t)$!

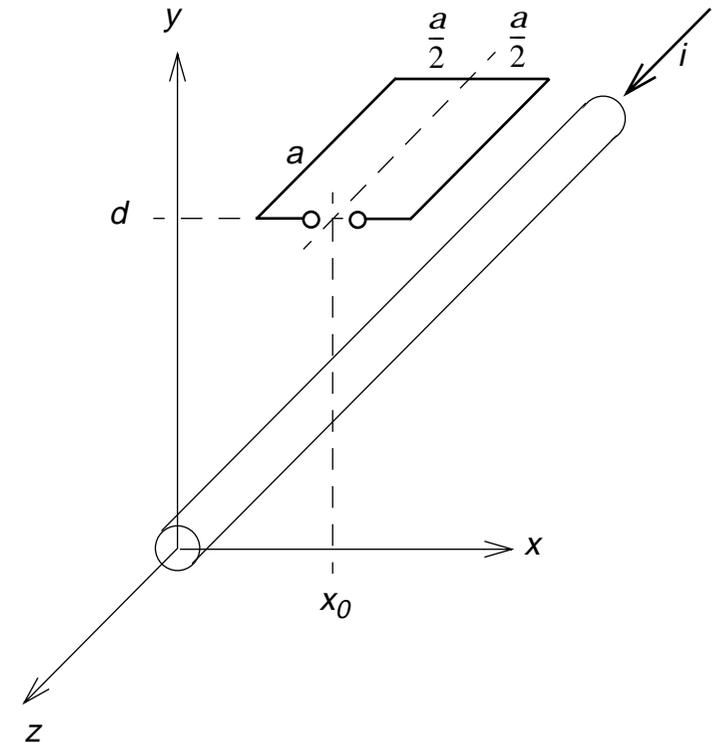


Aufgabe 3.8:

Ein gerades, unendlich dünnes und langes Leiterstück wird von dem Strom i durchflossen. Eine quadratische Leiterschleife mit der Kantenlänge a befindet sich zum Zeitpunkt t_0 bei x_0 im Abstand d oberhalb der xz -Ebene. Die Leiterschleife bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 in x -Richtung.

Gegeben ist $\mu_r = 1$ im gesamten Raum.

- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke \mathbf{H} , die durch den Strom i erzeugt wird, in Zylinderkoordinaten.
- Berechnen Sie die magnetische Induktion \mathbf{B} in kartesischen Koordinaten!
- Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ durch die Leiterschleife in Abhängigkeit vom Ort x_0 für $x_0 > \frac{a}{2}$.
Hinweis: $\int \frac{xdx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + b^2)$
- Welche Spannung $u(t)$ wird in der Leiterschleife induziert?



Aufgabenbereich 4: Netzwerke*

Aufgabe 4.1:

- Die von einem Widerstand aufgenommene Leistung soll um 25 % verringert werden. Um wieviel Prozent muß dafür die anliegende Spannung herabgesetzt werden?
- Bestimmen Sie die ohmschen Widerstände der nebenstehenden Schaltungen zwischen den Klemmen A und B.

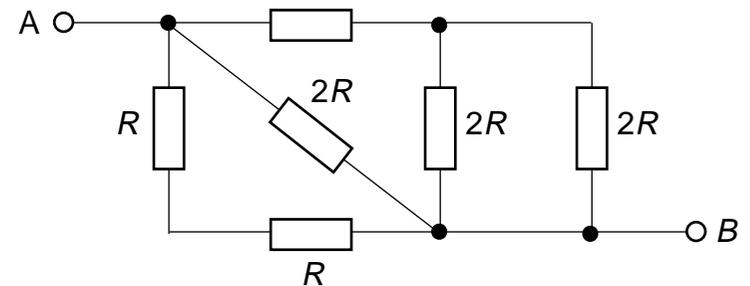
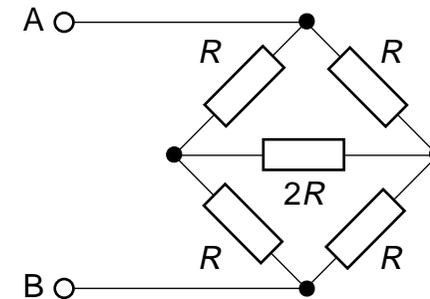
Gegeben sei eine Lichterkette aus 100 gleichen, in Reihe geschalteten Glühlampen. Die Betriebsspannung beträgt 230 V.

- Wie groß ist die Spannung an jeder einzelnen Lampe?
- Eine der Lampen brennt durch. Wie groß ist die Spannung an **dieser** Lampe nun?

Aufgabe 4.2:

An einer Autobatterie wird eine Leerlaufspannung $u_0 = 14 \text{ V}$ gemessen. Während des Startens beträgt der Anlasserstrom 60 A und die Spannung der Batterie sinkt auf 8 V.

- Wie groß ist der Innenwiderstand R_i der Batterie?
- Wandeln Sie die reale Spannungsquelle in eine äquivalente Stromquelle um.



* Abschnitt 4 ab Seite 47

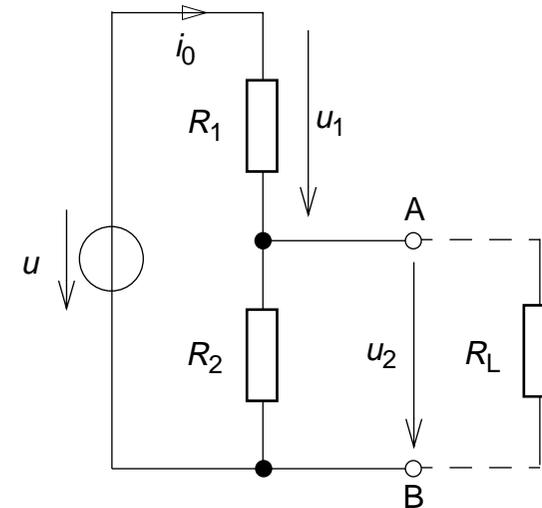
Aufgabe 4.3:

Gegeben ist der abgebildete Spannungsteiler. Der Widerstand R_L ist zunächst nicht angeschlossen.

- Berechnen Sie den Leerlaufstrom i_0 des Spannungsteilers sowie die Spannungen u_1 und u_2 .

Nun wird der Lastwiderstand R_L an die Klemmen A und B angeschlossen.

- Berechnen Sie wiederum den Strom i_0 sowie die Spannung u_2 .
- Berechnen Sie die Ströme i_2 und i_L .



Aufgabe 4.4:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung.

$$R_1 = 100 \, \Omega$$

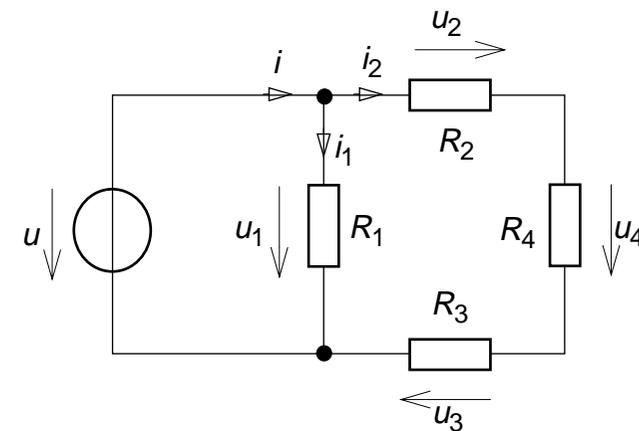
$$R_2 = 20 \, \Omega$$

$$R_3 = 30 \, \Omega$$

$$R_4 = 50 \, \Omega$$

$$u = 60 \, \text{V}$$

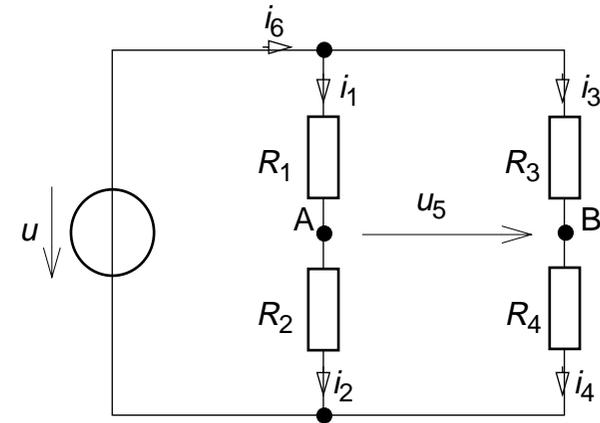
Berechnen Sie alle Ströme und Spannungen!



Aufgabe 4.5:

Gegeben ist eine Brückenschaltung nach nebenstehender Skizze.

- Berechnen Sie die Spannung u_5 zwischen den Klemmen A und B.
- Geben Sie eine Bedingung an, für die die Spannung u_5 gleich Null wird.



Aufgabe 4.6:

Zum Aufbau eines Spannungsmessers steht ein Meßwerk mit dem Innenwiderstand $R_i = 100 \Omega$ zur Verfügung. Das Meßwerk zeigt Vollausschlag bei einem Strom $i = 1 \text{ mA}$.

- Berechnen Sie die notwendigen Vorwiderstände R_v , wenn die Meßbereichsendwerte 30 V, 150 V, 300 V und 600 V betragen sollen.

Mit dem Meßwerk soll ein Strommesser für die Meßbereiche 0,3 A, 1,5 A, 3 A und 30 A aufgebaut werden.

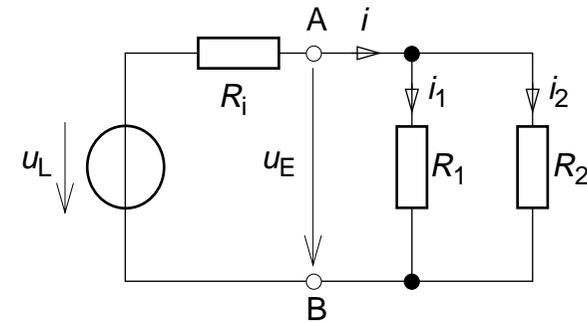
- Berechnen Sie die notwendigen Parallelwiderstände R_p .

Aufgabe 4.7:

An eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung u_L und dem Innenwiderstand R_i werden nach dem nebenstehenden Schaltplan die Widerstände R_1 und R_2 angeschlossen.

$$u_L = 60 \text{ V} \quad R_i = 2 \text{ } \Omega \quad R_2 = 2 R_1$$

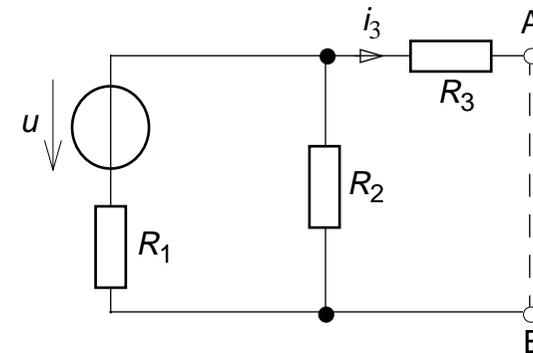
- Berechnen Sie die an den Klemmen A und B abgegebene Leistung P_{AB} sowie die von der Spannungsquelle abgegebene Leistung P_Q .
- Berechnen Sie den Wirkungsgrad η .
- Wie groß müssen die Widerstände R_1 und R_2 gewählt werden, damit die Leistung P_{AB} maximal wird? Wie groß ist dabei der Wirkungsgrad?
- Welche Bedingungen müssen für die Widerstände R_i , R_1 und R_2 gelten, wenn der Wirkungsgrad η seinen Höchstwert erreichen soll?



Aufgabe 4.8:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung mit der Spannungsquelle u und den Widerständen R_1 , R_2 , R_3 .

- Berechnen Sie u_L und R_i der Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen A und B!
- Berechnen Sie den Strom i_3 bei Kurzschluß der Klemmen a und b!
- Geben Sie i_k und R_i der Ersatzstromquelle bezüglich der Klemmen A und B an!



Aufgabe 4.9:

Ein Verbraucher bestehend aus den zwei Widerständen R_a und R_b ist an den Klemmen A und B an eine Quelle u_0 angeschlossen.

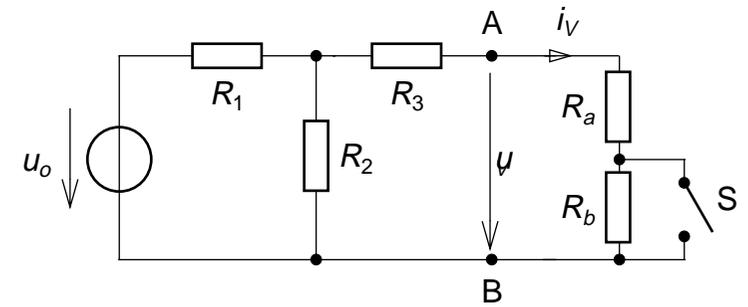
$$\begin{array}{lll} U_0 = 10 \text{ V} & R_1 = 0,5 \, \Omega & R_2 = 2 \, \Omega \\ R_3 = 4,6 \, \Omega & R_a = 3 \, \Omega & R_b = 24 \, \Omega \end{array}$$

Der Schalter S ist zunächst offen.

- Wieviele unabhängige Knoten- und Maschengleichungen gibt es für dieses Netzwerk?
- Bestimmen Sie den Strom i_V , die Spannung u_V und die umgesetzte Leistung P_V am Verbraucher, die Quellenleistung P_Q der Spannungsquelle und den Wirkungsgrad η der Schaltung.

Der Schalter S ist nun geschlossen (Kurzschluß im Verbraucher).

- Bestimmen Sie die Werte wie unter b.
- Ermitteln Sie die Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen A und B (Verbraucher ist nicht angeschlossen).

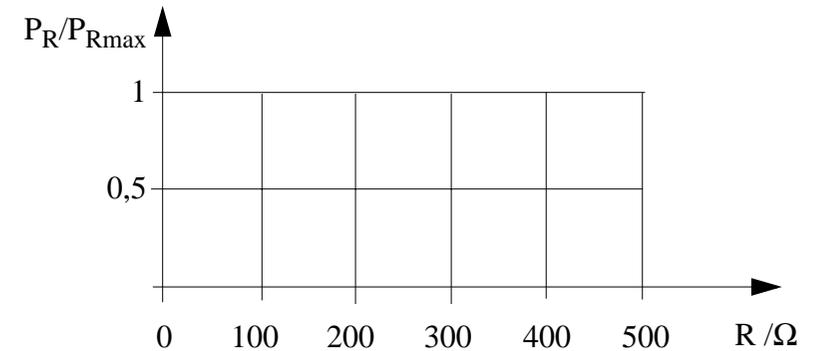
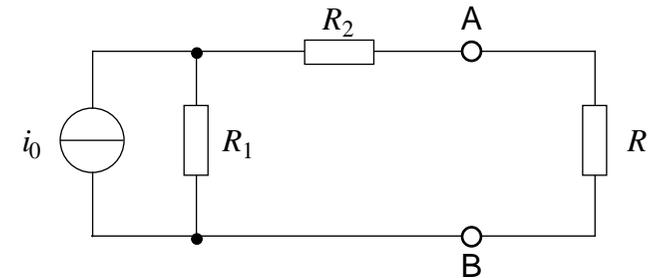


Aufgabe 4.10:

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:

$$i_0 = 0,3 \text{ A} \quad R_1 = 100 \, \Omega \quad R_2 = 50 \, \Omega.$$

- Berechnen Sie die im Lastwiderstand R umgesetzte Leistung P_R sowie die von der idealen Stromquelle aufgebrauchte Leistung P_Q in Abhängigkeit von R ! (als Formel angeben)
- Die an R abgegebene Leistung wird maximal, wenn gilt: $R = R_1 + R_2$. Berechnen Sie diese Leistung $P_{R\max}$ sowie die Leistung P_Q , die die Quelle dabei abgibt!
- Skizzieren Sie die Leistung P_R in Abhängigkeit von R in das nebenstehende Diagramm!
- Bestimmen Sie die Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen A und B!
- Wie groß wäre die Leistung P_{EQ} der Ersatzquelle bei $R = R_1 + R_2$? Warum ergibt sich ein anderer Wert für die Quellenleistung als unter Aufgabenpunkt a?

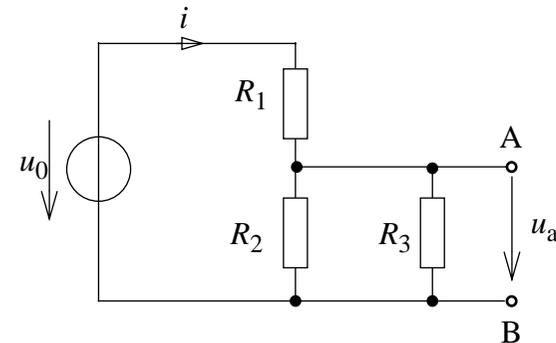


Aufgabe 4.11:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung.

$$u_0 = 16 \text{ V} \quad R_3 = 200 \, \Omega$$

- Wie groß müssen R_1 und R_2 sein, damit die Spannung $u_a = 0,5 u_0$ und der Strom $i = 0,2 \text{ A}$ betragen?
- Wieviel Prozent der verbrauchten Gesamtleistung werden im Widerstand R_3 verbraucht?



Aufgabe 4.12:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung.

$$u_0 = 45 \text{ V}$$

$$i_0 = 0,1 \text{ A}$$

$$R_4 = 600 \text{ } \Omega$$

$$R_1 = 300 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = R_3 = 1200 \text{ } \Omega$$

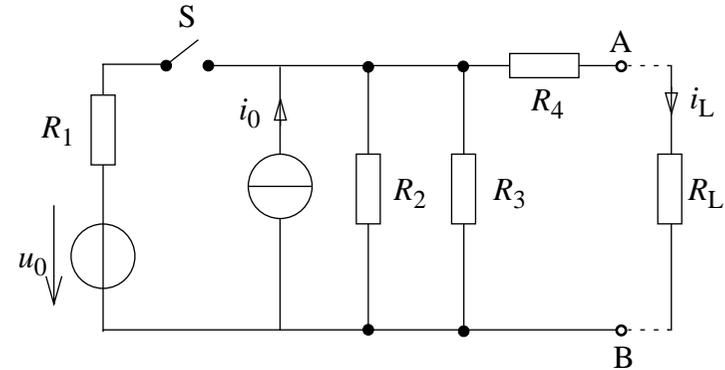
$$R_L = 1200 \text{ } \Omega$$

Der Schalter S sei zunächst geöffnet.

- Bestimmen Sie die Ersatzstromquelle bezüglich der Klemmen A und B.
- Wie groß ist der Strom i_L bei angeschlossenem Lastwiderstand R_L ?
- Welche Leistung P_Q gibt die ideale Stromquelle ab, welche Leistung P_L wird vom Lastwiderstand aufgenommen?
- Ersetzen Sie die reale Spannungsquelle (u_0 , R_1) durch eine äquivalente Stromquelle.

Nun wird der Schalter S geschlossen.

- Bestimmen Sie wiederum die Ersatzstromquelle bezüglich der Klemmen A und B.
- Wie groß ist nun der Strom i_L bei angeschlossenem Lastwiderstand R_L ?



Aufgabe 4.13:

Ein Kleinlaster ist mit einem Bleiakкумуляtor (Akku) mit folgenden Nenn-
daten bestückt:

Leerlaufspannung $u_0 = 12 \text{ V}$; Kurzschlußstrom $i_k = 300 \text{ A}$

a. Bestimmen Sie den Innenwiderstand R_i des Akkus.

Der Akku wird vom Generator des Fahrzeugs geladen. Dessen Nenndaten
sind:

$$U_{0G} = 14 \text{ V}$$
$$P_{G\max} = 500 \text{ W}$$

$$R_{iG} = 0,06 \text{ } \Omega$$

b. Bestimmen Sie den Ladestrom i_L und die Ladeleistung P_{GL} des Genera-
tors.

Wird der Generator überlastet?

Der Kleinlaster wird zum Wohnmobil umgebaut. Für die Versorgung der
Inneneinrichtungen wird ein zweiter, gleichartiger Akku parallelgeschaltet.

c. Bilden Sie die Ersatzspannungsquelle aus beiden Akkus.

d. Wie groß sind nun Ladestrom i_L und Ladeleistung P_{GL} des Generators?
Wird der Generator jetzt überlastet?

e. Welchen Vorteil hat der Anschluß des zweiten Akkus?

Aufgabe 4.14:

Gegeben ist nebenstehende Brückenschaltung mit vier festen und zwei variablen Widerständen. Die Brücke wird von einer Quelle Q gespeist.

Bestimmen Sie die Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen A und B für die Fälle

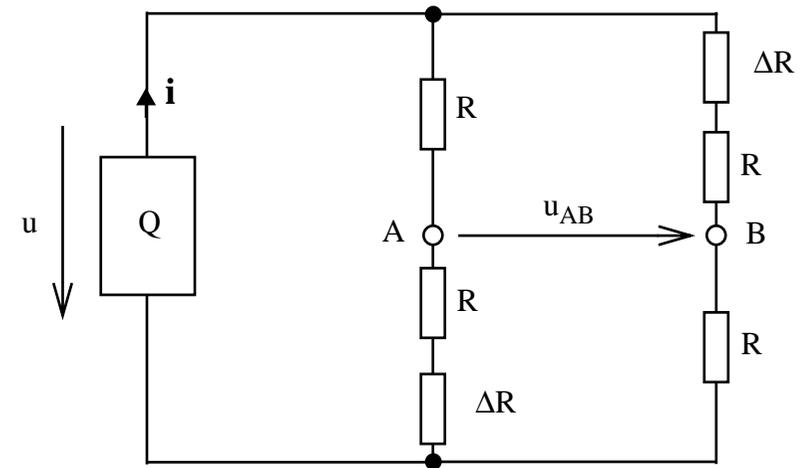
- Die Quelle ist eine ideale Stromquelle mit dem Kurzschlußstrom $i = i_0$.
- Die Quelle ist eine ideale Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung $u = i_0 R$.

Durch Messung der Spannung u_{AB} soll der variable Widerstand ΔR bestimmt werden.

- Ist Strom- oder Spannungsspeisung der Brücke für diese Messung besser geeignet? Begründung!

Zwischen A und B wird nun ein Spannungsmeßgerät mit Innenwiderstand $100 R$ angeschlossen.

- Wie groß ist die gemessene Spannung u_M ? Benutzen Sie die Quelle, die Sie in c) ausgewählt habe

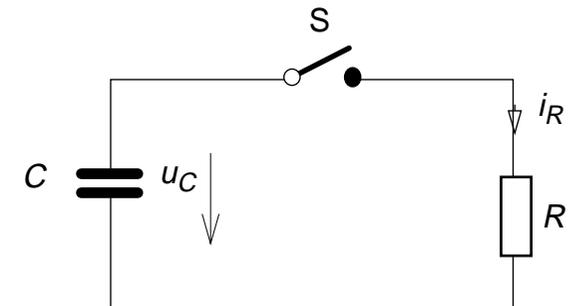


Aufgabenbereich 5: Schaltvorgänge*

Aufgabe 5.1:

Der Kondensator ist zum Zeitpunkt $t = 0$ auf die Spannung u_{C0} aufgeladen. Zu diesem Zeitpunkt wird der Schalter S geschlossen.

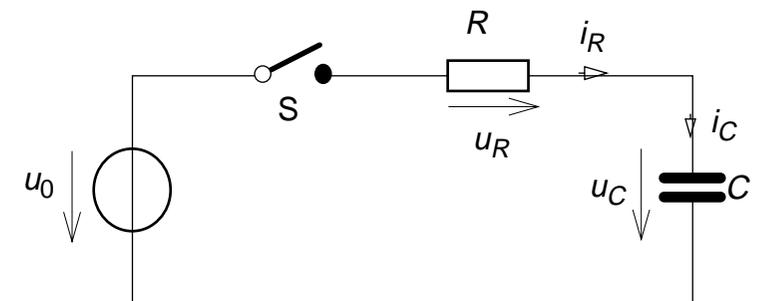
- Geben Sie die Zählpfeile für Strom und Spannung an allen Bauelementen an.
- Stellen Sie die Differentialgleichung für die Spannung u_C auf.
- Geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.
- Skizzieren Sie den Spannungsverlauf von $u_C(t)$ und den Stromverlauf $i_C(t)$.
- Zu welchem Zeitpunkt t_1 ist die Spannung u_C auf 37% ($\approx 1/e$) ihres Anfangswerts u_{C0} gesunken?



Aufgabe 5.2:

Der Kondensator sei zum Zeitpunkt $t = 0$ vollständig entladen. Zu diesem Zeitpunkt wird der Schalter S geschlossen.

- Stellen Sie die Differentialgleichung für die Spannung u_C auf.
- Geben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung an.
- Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Größen u_C , u_R , i_C und i_R .
- Nach welcher Zeit ist die Kondensatorspannung auf 63% ($\approx 1 - 1/e$) des Endwertes angestiegen?

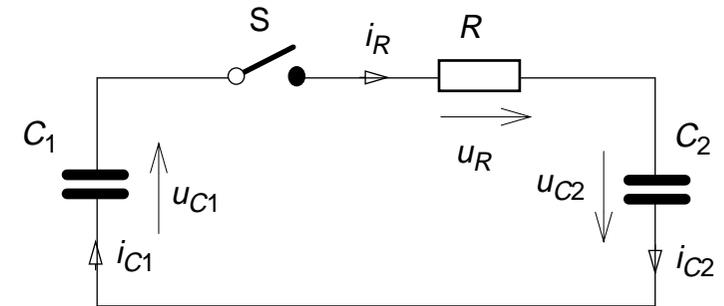


* Zu den Abschnitten 2.3.2 "Entladevorgang" (Seite 20), 2.3.3 "Ladevorgang" (Seite 22) und 3.6.1 "Selbstinduktion, Induktivität" (ab Seite 37)

Aufgabe 5.3:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Kondensator C_1 auf eine Spannung u_0 aufgeladen ($u_{C1} = u_0$ für $t < t_0$). Der Kondensator C_2 sei vollständig entladen ($u_{C2} = 0$ für $t < t_0$). Zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ wird der Schalter S geschlossen.

- Stellen Sie die Knotengleichungen, die Maschengleichung und die drei Bauelementgleichungen auf.
- Leiten Sie die Maschengleichung nach t ab und stellen Sie die Differentialgleichung für den Strom i_R auf. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ dieser Differentialgleichung. (Hinweis: Diese Zeitkonstante beschreibt die Zeitabhängigkeit aller am Umladevorgang beteiligten Ströme und Spannungen.)
- Wie groß sind die Spannungen u_{C1} , u_{C2} und u_R unmittelbar nach dem Schließen des Schalters? (Zählpfeilkonvention bei den Vorzeichen beachten).
- Nach Abschluß des Umladevorgangs ist die Ladung gleichmäßig auf beide Kondensatoren verteilt. Wie groß sind jetzt die Spannungen u_{C1} , u_{C2} und u_R ?
- Geben Sie den zeitlichen Verlauf der Spannungen u_{C1} , u_{C2} und u_R unter Berücksichtigung der in c und d berechneten Anfangs- und Endwerte sowie der unter b berechneten Zeitkonstante an.
- Skizzieren Sie die Zeitverläufe von u_{C1} , u_{C2} und u_R .
- Wie groß ist die in der Anordnung gespeicherte Energie vor und nach dem Umladevorgang. (Hinweis: $E_{\text{Kondensator}} = \frac{1}{2} C u_c^2$).
- Berechnen Sie die am Widerstand umgesetzte Energie durch Integration der aufgenommenen Leistung.



Aufgabe 5.4:

Zur Zeit $t = 0$ beträgt die Kondensatorspannung $u_C(t=0) = u_{C0} = 20 \text{ V}$. Der Schalter S wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen!

Gesucht werden:

- Die Spannung u_C am Kondensator als Funktion der Zeit t ,
- die Zeit t_0 , bei der die Spannung $u_C = 0$ wird,
- der Strom i_C als Funktion der Zeit t und
- der Verlauf der Spannung u_{R2} .
- Skizzieren Sie u_C , i_C und u_{R2} im Intervall $0 \leq t \leq 4T$!

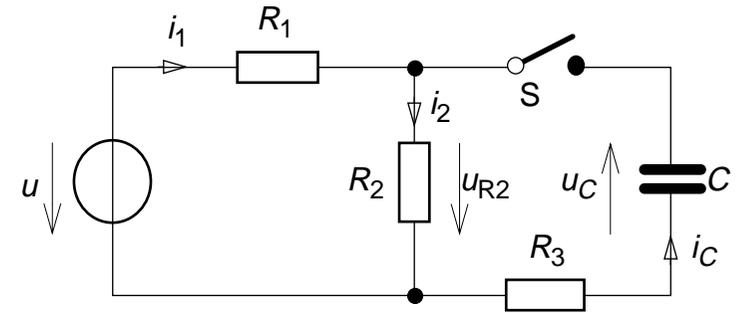
Zahlenwerte: $u = 30 \text{ V}$

$R_1 = 3 \Omega$

$C = 100 \mu\text{F}$

$R_2 = 6 \Omega$

$R_3 = 8 \Omega$



Aufgabe 5.5:

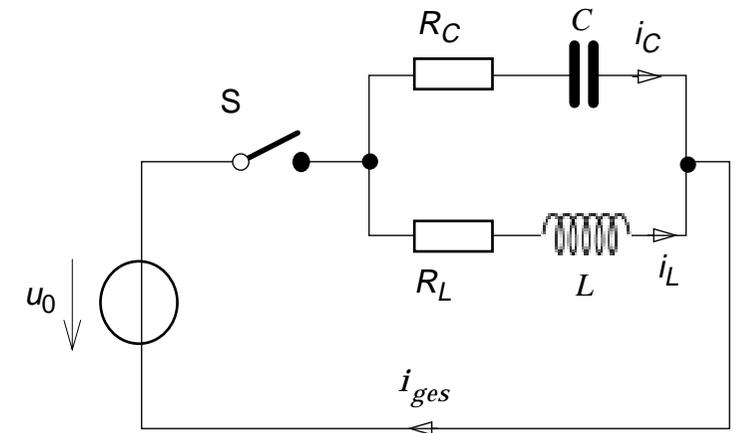
- Zur Zeit $t = 0$ gilt $u_C(0) = 0$ und $i_L(0) = 0$.
- Der Schalter S wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen.

Gesucht werden:

- Der Kondensatorstrom i_C als Funktion der Zeit,
- die Differentialgleichung für den Spulenstrom i_L ,
- der Spulenstrom i_L als Funktion der Zeit,
- der Gesamtstrom i_{ges} .

Es sei $R_C = 10 \text{ k}\Omega$ und $C = 10 \text{ nF}$.

- Für welche Wahl von R_L und L gilt: $i_{ges} = \text{const}$?



Aufgabe 5.6:

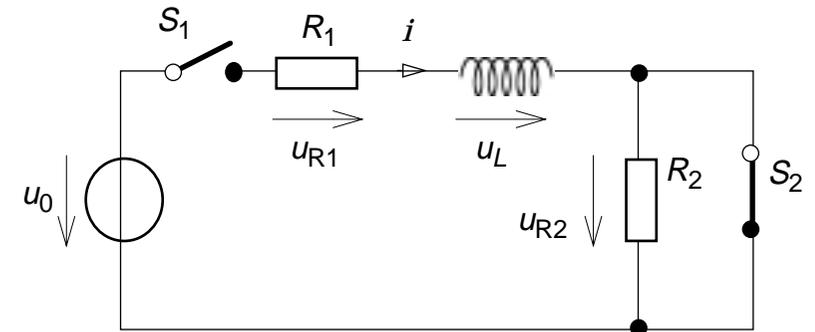
Für Zeiten $t < 0$ ist der Schalter S_1 offen und der Schalter S_2 geschlossen (siehe Skizze). Zum Zeitpunkt $t = t_1 = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen.

a. Geben Sie den Stromverlauf $i(t)$ für $t > t_1$ an.

Zum Zeitpunkt t_2 wird der Schalter S_2 geöffnet.

b. Geben Sie den Stromverlauf $i(t)$ für $t > t_2$ an.

c. Skizzieren Sie den Stromverlauf für den gesamten Zeitbereich $t > t_1$.



Aufgabe 5.7:

Zum Zeitpunkt $t = t_1 = 0$ gilt $i_{R_2}(0) = 0$, $i_L(0) = 0$. Der Schalter S wird zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ geschlossen.

- Geben Sie die Differentialgleichung für den Strom i_L an.
- Wie groß ist der Anfangswert i_{Lanf} des Stromes $i_L(t)$.
- Wie groß ist der Endwert i_{Lend} des Stromes $i_L(t)$?
- Geben Sie einen formelmäßigen Ausdruck des Stromverlaufs $i_L(t)$ für den Zeitbereich $t > t_1$ an.

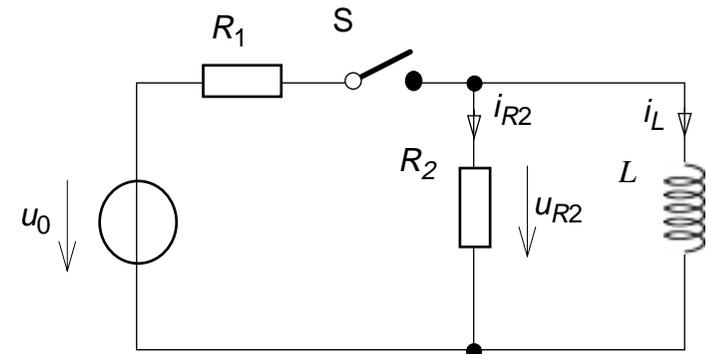
Wenn der Spulenstrom den Wert $i_L(t) = \frac{1}{2}i_{Lend}$ erreicht hat ($t = t_2$), wird der Schalter wieder geöffnet.

- Geben Sie den formelmäßigen Ausdruck des Stromverlaufs $i_L(t)$ für $t > t_2$ an.
- Skizzieren Sie den Stromverlauf für $t_1 < t < t_2$ und $t > t_2$ und kennzeichnen Sie charakteristische Größen!

Es sei nun: $u_0 = 10 \text{ V}$
 $R_2 = 10 \Omega$

$R_1 = 1 \Omega$
 $L = 0,1 \text{ H.}$

- Bestimmen Sie den maximalen Betrag der Spannung $u_{R_2}(t)$ am Widerstand R_2 .



Aufgabenbereich 6: Wechselstrom, komplexe Rechnung*

Aufgabe 6.1:

In qualitativen Zeigerdiagrammen sollen nicht die Zahlenwerte, sondern die Relation der Zeiger zueinander dargestellt werden.

Es gilt: $R = \omega L = 1/\omega C$

Gegeben sei die Schaltung in Abb. 1 mit $\underline{U} = Ue^{j0^\circ}$.

- Zeichnen Sie die Zeiger \underline{U}_R und \underline{U}_L relativ zu \underline{I}_{RL} .
- Zeichnen Sie die Zeiger \underline{U}_C und \underline{I}_C relativ zu \underline{U} .
- Zeichnen Sie die Zeiger \underline{U}_R , \underline{U}_L , \underline{I}_{RL} , \underline{I}_C und \underline{I} .

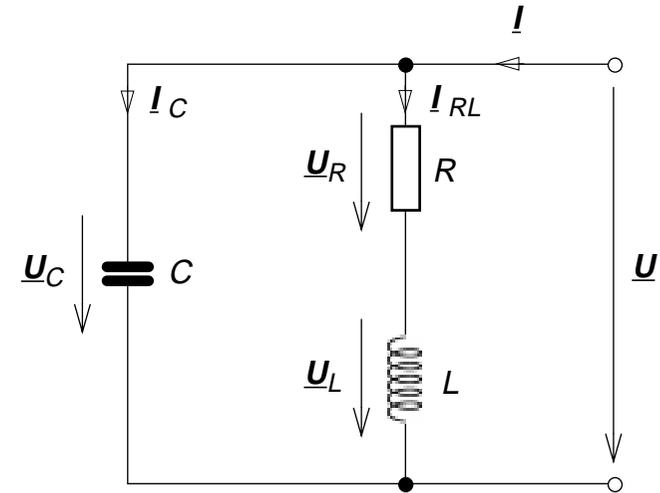


Abb. 1

Gegeben sei die Schaltung in Abb. 2 mit $\underline{U} = Ue^{j0^\circ}$.

- Zeichnen Sie den Zeiger von \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , \underline{I}_4 und \underline{I}_{ges} relativ zu \underline{U} !

(Hinweis: Rechte Winkel sind zu markieren!)

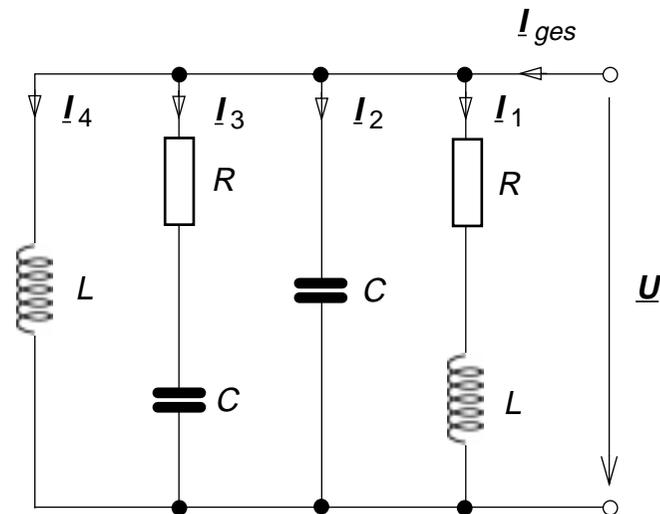
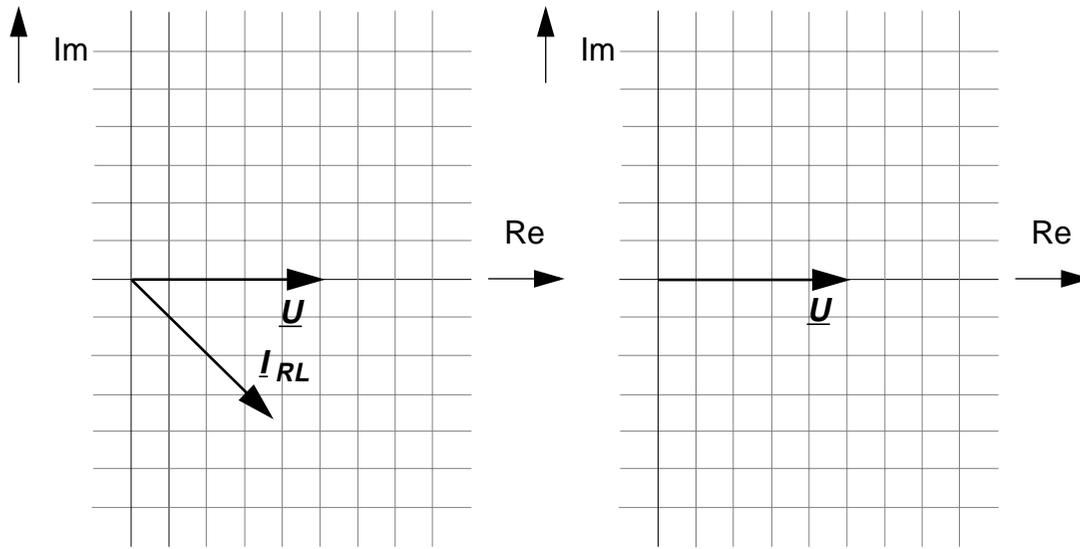


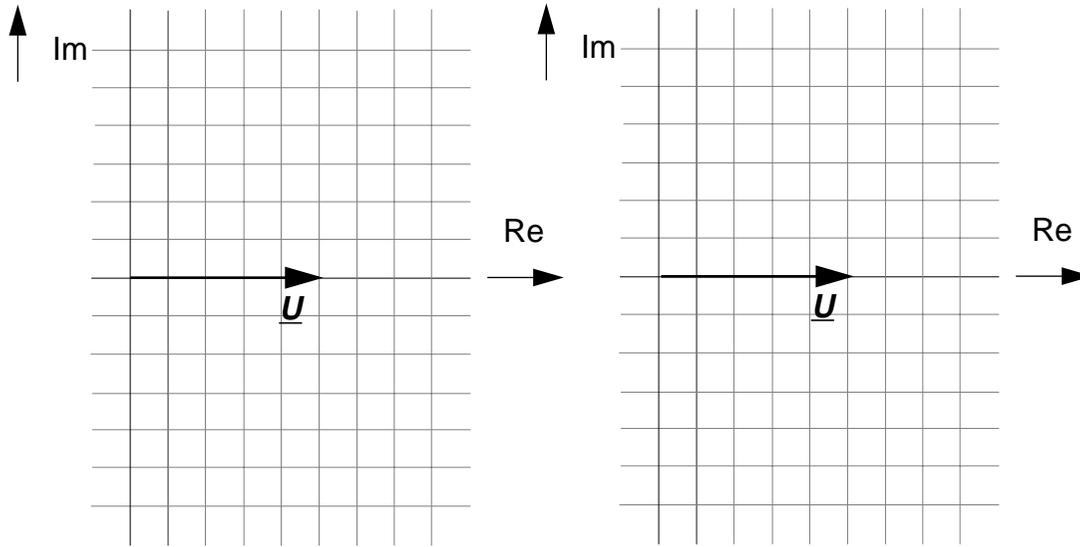
Abb. 2

* Abschnitt 6 ab Seite 73



zu a.

zu b.



zu c.

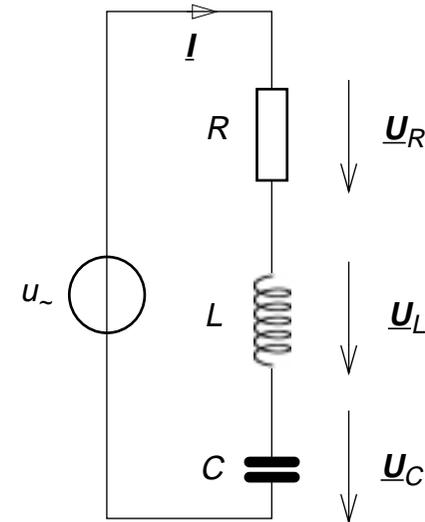
zu d.

Aufgabe 6.2:

Gegeben ist die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R , einer Induktivität L und einer Kapazität C . Die Schaltung wird an eine Spannungsquelle mit veränderlicher Frequenz angeschlossen.

Es gilt: $R = 300 \Omega$ $L = 0,1 \text{ H}$
 $C = 2,5 \mu\text{F}$ $U = 30 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$

- Ermitteln Sie die Frequenz f_0 , bei welcher der komplexe Widerstand der Reihenschaltung rein reell ist.
- Berechnen Sie den induktiven und kapazitiven Blindwiderstand sowie den komplexen Widerstand \underline{Z} der Anordnung für die folgenden Frequenzen und stellen Sie die Größen in der komplexen Ebene dar.
 $f_1 = 0,25 \cdot f_0$
 $f_2 = 0,5 \cdot f_0$
 $f_3 = 2 \cdot f_0$
 $f_4 = 4 \cdot f_0$
- Zeichnen Sie die Ortskurve des komplexen Widerstandes und tragen Sie die in b) angegebenen Frequenzen als Parameter ein.
- Ermitteln Sie die Teilspannungen \underline{U}_R , \underline{U}_C , \underline{U}_L und den Strom \underline{I} für die Frequenz $f_3 = 2 \cdot f_0$. Zeichnen Sie ein Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene.
- Welche Leistungen nehmen die Schaltelemente R , L , C jeweils auf und welche Leistung wird von der Gesamtschaltung aufgenommen?



Aufgabe 6.3:

Beim Betrieb einer nicht kompensierten Leuchtstofflampe mit einem induktiven Vorschaltgerät an einem Wechselstromnetz mit der Nennspannung U_n wird ein Strom I gemessen. Die Lampe nimmt die Wirkleistung P_1 auf; sie kann im Ersatzschaltbild durch einen ohmschen Widerstand dargestellt werden.

$$U_n = 230 \text{ V}$$

$$P_1 = 65 \text{ W}$$

$$I = 0,7 \text{ A}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

- a. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild.
- b. Berechnen Sie die Scheinleistung S_1 , den Leistungsfaktor $\cos\varphi_1$ und die Blindleistung Q_1 .
- c. Berechnen Sie den induktiven Widerstand ωL und den ohmschen Widerstand R der Ersatzschaltung.
- d. Berechnen Sie die Brennspannung U der Lampe.
- e. Durch Parallelkompensation soll der Leistungsfaktor auf $\cos\varphi_2 = 0,95$ verbessert werden. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild und berechnen Sie die erforderliche Kapazität C des Kondensators.
- f. Berechnen Sie den von der kompensierten Schaltung aufgenommenen Strom I_{komp} .
- g. Für die in e) gefundene Ersatzschaltung soll mit Hilfe der komplexen Rechnung ein Zeigerbild gezeichnet werden. Tragen Sie dazu in der Ersatzschaltung alle Spannungen und Ströme als komplexe Größen ein. Berechnen Sie alle unbekanntenen Ströme und Spannungen mit der Annahme, daß an den Klemmen der Schaltung die Spannung $\underline{U}_n = 230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$ liegt. Zeichnen Sie dann das Zeigerbild und kennzeichnen Sie den Winkel φ_2 .

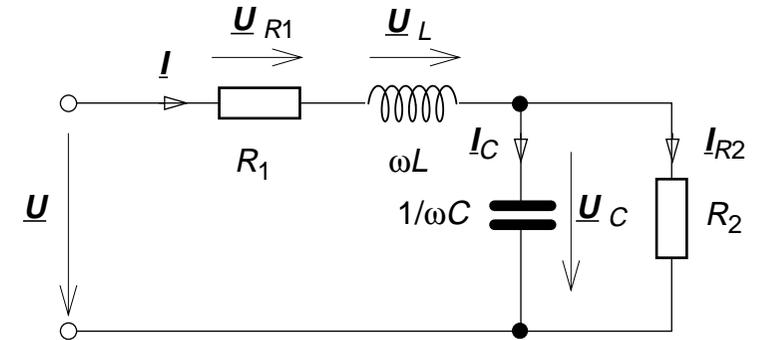
Aufgabe 6.4:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung.

$$\begin{aligned} \underline{I} &= 10 \text{ mA} \cdot e^{j0^\circ} & \omega L &= 0,4 \, \Omega \\ R_1 &= 0,8 \, \Omega & 1/\omega C &= 0,3 \, \Omega \\ R_2 &= 0,25 \, \Omega \end{aligned}$$

Empfohlener Maßstab: 1 mV = 10 mm, 1 mA = 10 mm

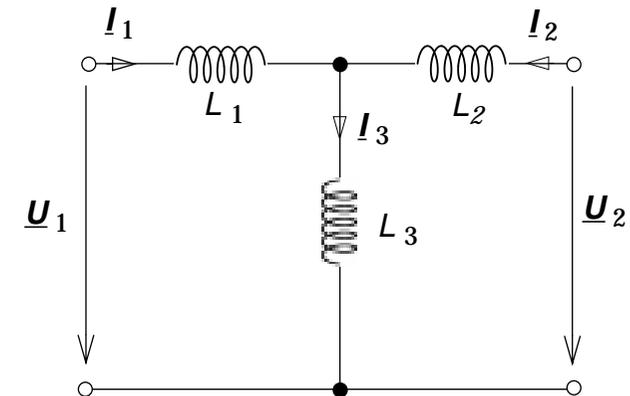
- Berechnen Sie aus den einzelnen Bauelementen den komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Gesamtschaltung in Komponentenform.
- Berechnen Sie die Ströme und Spannungen nach Betrag und Phase.
- Zeichnen Sie ein maßstäbliches Zeigerbild, das alle Spannungen und Ströme der obigen Schaltung enthält, und kennzeichnen Sie den Phasenwinkel φ zwischen der Spannung \underline{U} und dem Strom \underline{I} .



Aufgabe 6.5:

Gegeben ist nebenstehende Schaltung aus drei Spulen.

- Geben Sie die Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 als Funktionen der Ströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 an.
- Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Gleichungssystem, das die Ströme und Spannungen eines verlustlosen Transformators miteinander verknüpft und geben Sie eine gegeninduktionslose Schaltung an, die diesen Transformator beschreibt.
Welche zusätzliche Schaltungsmaßnahme muss getroffen werden, damit der Transformator in allen seinen Eigenschaften mit der so gefundenen Schaltung übereinstimmt?

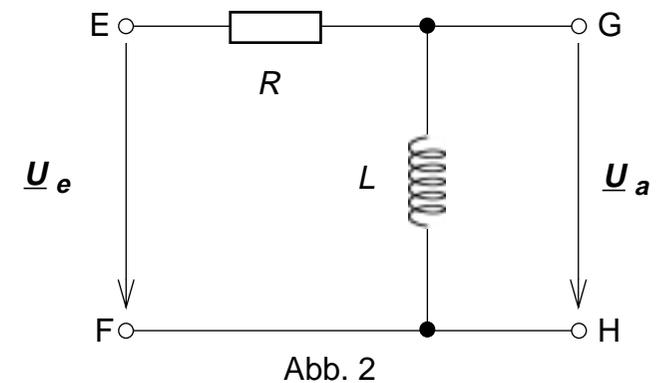
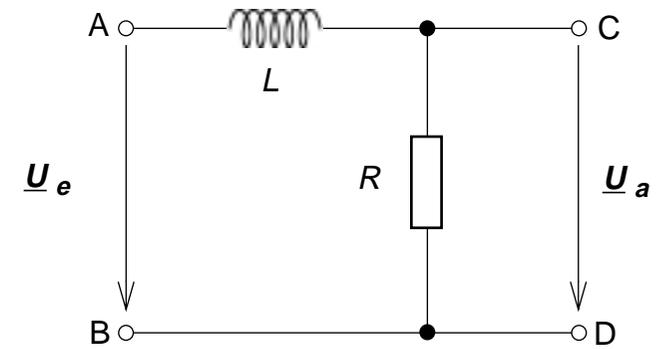


Aufgabenbereich 7: Filter*

Aufgabe 7.1:

An den Eingängen der Abb.1 bzw. Abb.2 (A-B, E-F) liegt eine sinusförmige Wechselspannung \underline{U}_e der Frequenz $\omega = 2\pi f$.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen \underline{F}_1 und \underline{F}_2 in Abhängigkeit von ω , R und L.
- Geben Sie die Eckfrequenz ω_0 (R, L) an, bei der der Betrag der Übertragungsfunktion das $1/\sqrt{2}$ -fache des Maximalwertes erreicht.
- Geben Sie \underline{F}_1 und \underline{F}_2 in einer Form an, die nur vom Verhältnis ω/ω_0 abhängt.

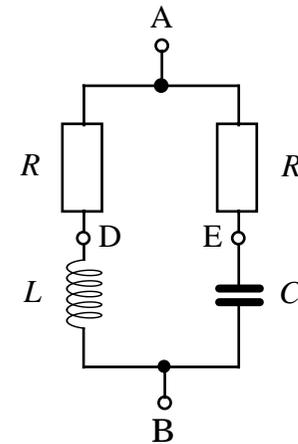


* Abschnitt 7 ab Seite 105

Aufgabe 7.2:

Gegeben ist die nebenstehende Brückenschaltung, in der die Induktivität L , die Kapazität C und der Widerstandswert R bekannt sind.

- Bestimmen Sie allgemein den komplexen Widerstand Z_{ges} zwischen den Klemmen A und B als Funktion der Kreisfrequenz ω ! (Hinweis: Der Nenner von $Z_{\text{ges}}(\omega)$ sollte *nicht* reellwertig gemacht werden!)
Geben Sie $Z_{\text{ges}}(\omega)$ für die Kreisfrequenzen $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ an und erklären Sie, wie das Ergebnis unmittelbar aus der Schaltung abgelesen werden kann? (*Kurze Erklärung!*)
- Für welche Kreisfrequenz ω_0 wird Z_{ges} reell?
- Zeichnen Sie in getrennten Diagrammen die Ortskurven der komplexen Widerstände der beiden Zweige Z_{RL} (Serienschaltung $R-L$) und Z_{RC} (Serienschaltung $R-C$)!
- Bestimmen Sie das Verhältnis der Diagonalspannung U_{DE} zur Eingangsspannung U_{AB} bei der Frequenz ω_0 (siehe b.) für den Fall gleicher Zeitkonstanten in beiden Zweigen, d.h. $R \cdot C = L/R$!



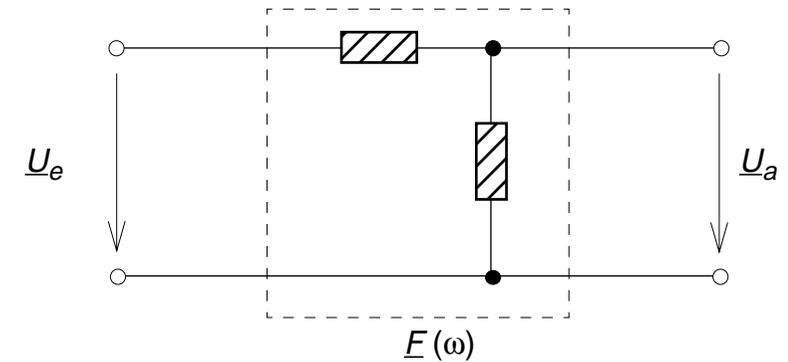
Aufgabe 7.3:

Für zwei Filterschaltungen nach nebenstehender Skizze sei der Betrag $|\underline{F}|$ der Übertragungsfunktion $\underline{F} = \underline{U}_a / \underline{U}_e$ für die folgenden Kreisfrequenzen ω gegeben:

$$F(\omega) = 1 \text{ für } \omega = 0 \qquad F(\omega) = 1/\sqrt{2} \text{ für } \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

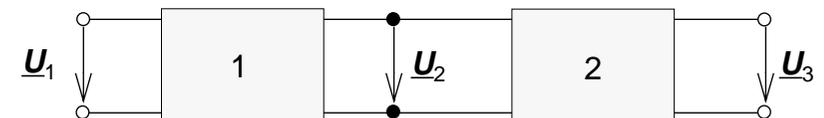
$$F(\omega) = 0 \text{ für } \omega \rightarrow \infty$$

- Skizzieren Sie beide Möglichkeiten ein Filter mit dieser Charakteristik aus je einem ohmschen Widerstand und einem weiteren passiven Bauelement aufzubauen (Bauelemente bezeichnen!).
- Der ohmsche Widerstand beträgt jeweils $R = 1 \Omega$. Bestimmen Sie die Werte der anderen Bauelemente.



Die Filter werden nun gemäß dem nebenstehenden Blockdiagramm *unmittelbar* (d.h. ohne Entkopplung) zusammengeschaltet, wobei Filter 1 eine Induktivität enthält.

- Skizzieren Sie die Gesamtschaltung mit allen Bauelementen und geben Sie das Verhältnis $\underline{F}_2 = \underline{U}_3 / \underline{U}_2$ in Abhängigkeit von ω und den Bauelementen an.
- Geben Sie das Verhältnis $\underline{F}_1 = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ für den in Abb. 2 dargestellten Fall als Funktion von ω und den Bauelementen an! (Nicht auflösen!).
- Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $\underline{F}_{\text{ges}}$ der Schaltung in Abhängigkeit von \underline{F}_1 und \underline{F}_2 an.



Aufgabenbereich 8: Drehstrom*

Aufgabe 8.1:

In einem Gewerbebetrieb soll ein Lastenaufzug installiert werden, der von einem Drehstrommotor angetrieben wird. Der Aufzug hat die Masse $m_A = 4000$ kg. Die maximale Last beträgt $m_L = 6000$ kg.

- a. Wie groß ist die erforderliche Antriebsleistung P_a , wenn der Aufzug mit einer Geschwindigkeit $v = 0,5$ m/s aufwärts fahren soll? ($g = 9,81$ m/s²) Wählen Sie aus der folgenden Tabelle den Motor so aus, daß eine Leistungsreserve von mindestens 20 % vorhanden ist.

mech. Leistung P_m	30 kW	40 kW	50 kW	64 kW	80 kW	100kW
Leistungsfaktor $\cos\varphi$	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88
Wirkungsgrad η	0,87	0,88	0,88	0,89	0,90	0,91

- b. Wie groß ist der Nennstrom I_n des Motors bei Nennspannung $U_n = 400$ V? Wählen Sie den erforderlichen Leiterquerschnitt A der Anschlußleitung des Motors aus der folgenden Tabelle aus.

Leiterquerschnitt in mm ²	10	16	25	35	50	70
Belastbarkeit in A	65	87	115	143	178	220

- c. Für die Aufzugsteuerung und weitere Anlageteile (z.B. Bremslüftmagnete) wird eine zusätzliche Wirkleistung $P_Z = 8,1$ kW und eine Blindleistung $Q_Z = 2,4$ kVA benötigt. Wie groß ist die gesamte Wirk-, Blind- und Scheinleistung der Anlage bei Nennleistung des gewählten Motors?

* Abschnitt 8 ab Seite 115

Aufgabe 8.2:

Die Heizwicklung eines elektrischen Trockenofens ist in symmetrischer Sternschaltung an ein Dreiphasennetz mit der Leiterspannung U und der Frequenz f angeschlossen. Er nimmt bei einem Leistungsfaktor $\cos\varphi_1$ eine Wirkleistung P auf.

Zahlenwerte : $U = 400 \text{ V}$ $f = 50 \text{ Hz}$ $P = 21 \text{ kW}$ $\cos\varphi_1 = 0,8$

- a. Berechnen Sie den von jedem Strang aufgenommenen Strom I_{Str}
- b. Berechnen Sie die gesamte Schein- und Blindleistung.
- c. Berechnen Sie den Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand je Strang.
- d. Wie groß müssen die Kapazitäten der in Sternschaltung geschalteten Kondensatoren gewählt werden, wenn mit deren Hilfe der Leistungsfaktor auf seinen Höchstwert gebracht werden soll?
- e. Welche Kapazitäten müssen die Kondensatoren haben, wenn sie in Dreieckschaltung sind?

Aufgabe 8.3:

Ein Asynchronmotor wird in Sternschaltung an die Klemmen R, S, T eines 3-Phasen-Netzes geschaltet.

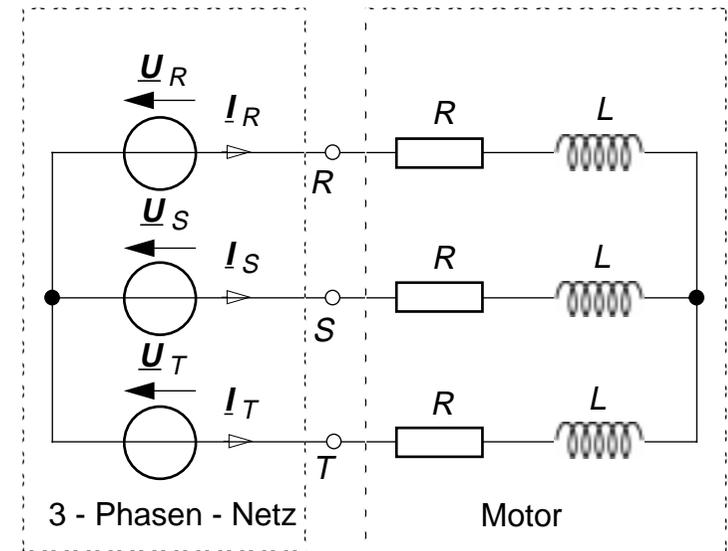
Zahlenwerte:

$$\underline{U}_R = 230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \quad \underline{U}_S = 230 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ} \quad \underline{U}_T = 230 \text{ V} \cdot e^{-j240^\circ}$$
$$f = 50 \text{ Hz} \quad R = 100 \, \Omega \quad L = 3/4\pi \text{ H}$$

- a. Wie groß sind die Ströme \underline{I}_R , \underline{I}_S und \underline{I}_T sowie die aufgenommene Wirkleistung P_1 ?

Für den Nennbetrieb wird der Motor nach dem Hochlaufen in Dreieck geschaltet.

- b. Wie groß sind die Ströme \underline{I}_R , \underline{I}_S und \underline{I}_T sowie die aufgenommene Wirkleistung P_2 ?
- c. Zeichnen Sie die komplette Schaltung mit allen Werten!
- d. Wie groß ist das abgegebene Drehmoment M_D im Nennbetrieb (Schlupf $s = 3 \%$, mechanischer Wirkungsgrad $\eta = 95 \%$, Polpaarzahl = 1)?
- e. Warum wird der Motor zunächst in Sternschaltung angefahren und dann erst für den Nennbetrieb auf Dreieckschaltung umgeschaltet?
- f. Welche möglichen Auswirkungen hat es, wenn der Motor in Sternschaltung geschaltet bleibt.



Aufgabe 8.4:

Ein asymmetrischer Verbraucher ist an einen symmetrischen 3-Phasen-Generator angeschlossen. Berechnen Sie die Sternpunktverlagerungsspannung $\underline{U}_{M'M}$ sowie den Strom \underline{I}_M für die folgenden Zustände der Schalter S_1 und S_2 :

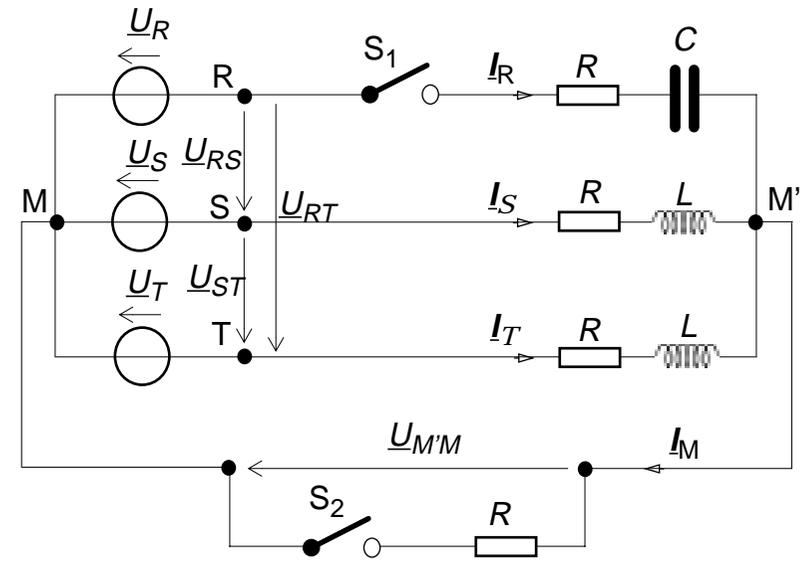
- S_1 - geöffnet, S_2 - geöffnet;
- S_1 - geöffnet, S_2 - geschlossen;
- S_1 - geschlossen, S_2 - geöffnet;
- S_1 - geschlossen, S_2 - geschlossen;

(Bei den Unterpunkten b und d benutzen Sie das Ersatzquellenverfahren!)

Zahlenwerte:

$$U_n = 400 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz} \quad R = 10 \Omega \quad L = 50 \text{ mH} \quad C = 50 \mu\text{F}$$

$$\underline{U}_R = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \quad \underline{U}_S = \underline{U}_R e^{-j120^\circ} \quad \underline{U}_T = \underline{U}_R e^{j120^\circ}$$



Lösung:

$$a: \underline{I}_M = 0; \quad \underline{U}_{M'M} = -115,5 \text{ V}$$

$$b: \underline{I}_M = 6,82 \text{ A} \cdot e^{j152,364^\circ}; \quad \underline{U}_{M'M} = 68,2 \text{ V} \cdot e^{j152,364^\circ}$$

$$c: \underline{I}_M = 0; \quad \underline{U}_{M'M} = 158,5 \text{ V} \cdot e^{j164,9^\circ}$$

$$d: \underline{I}_M = 8,63 \text{ A} \cdot e^{j138,7^\circ}; \quad \underline{U}_{M'M} = 86,3 \text{ V} \cdot e^{j138,7^\circ}$$